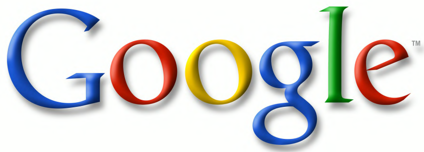
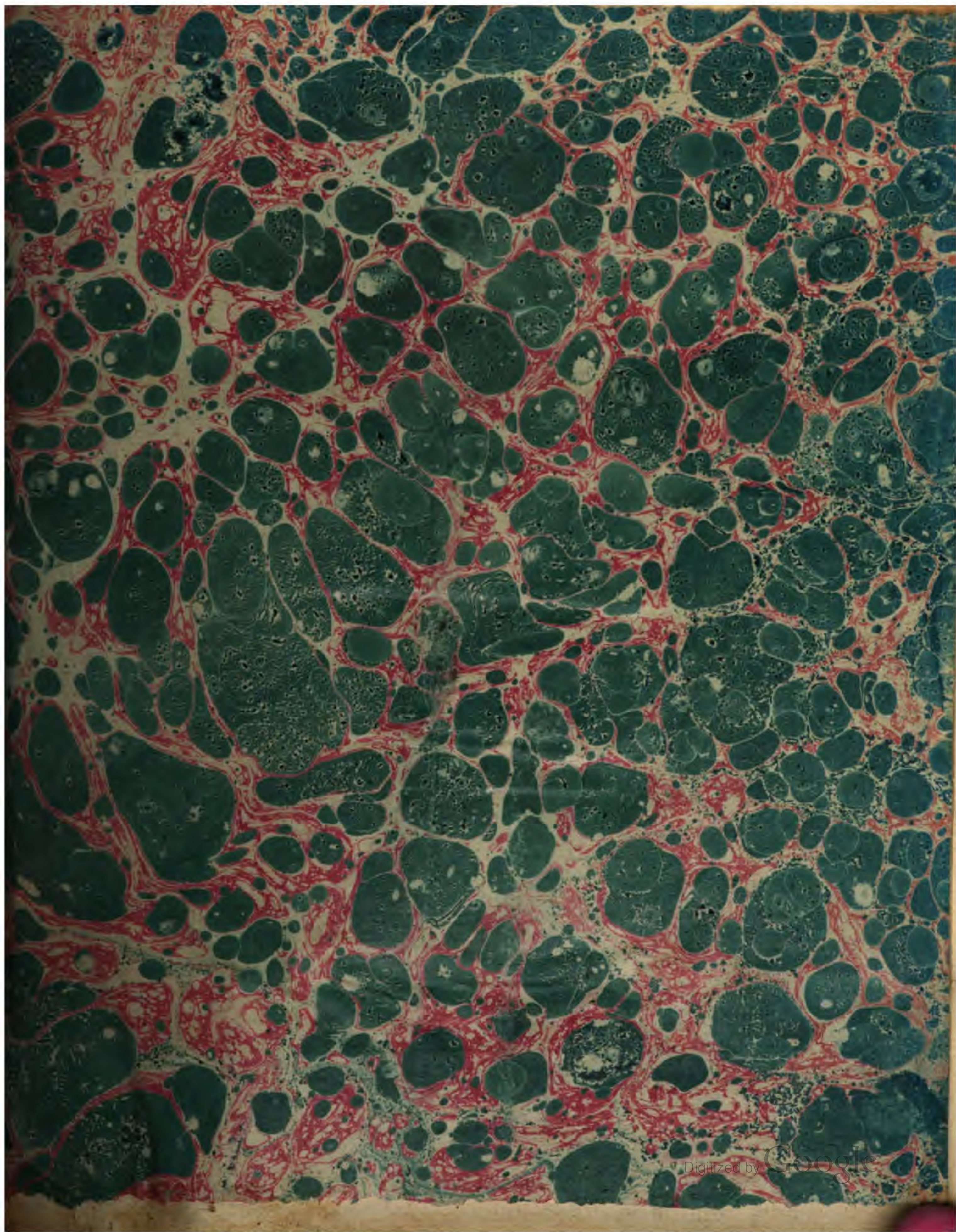
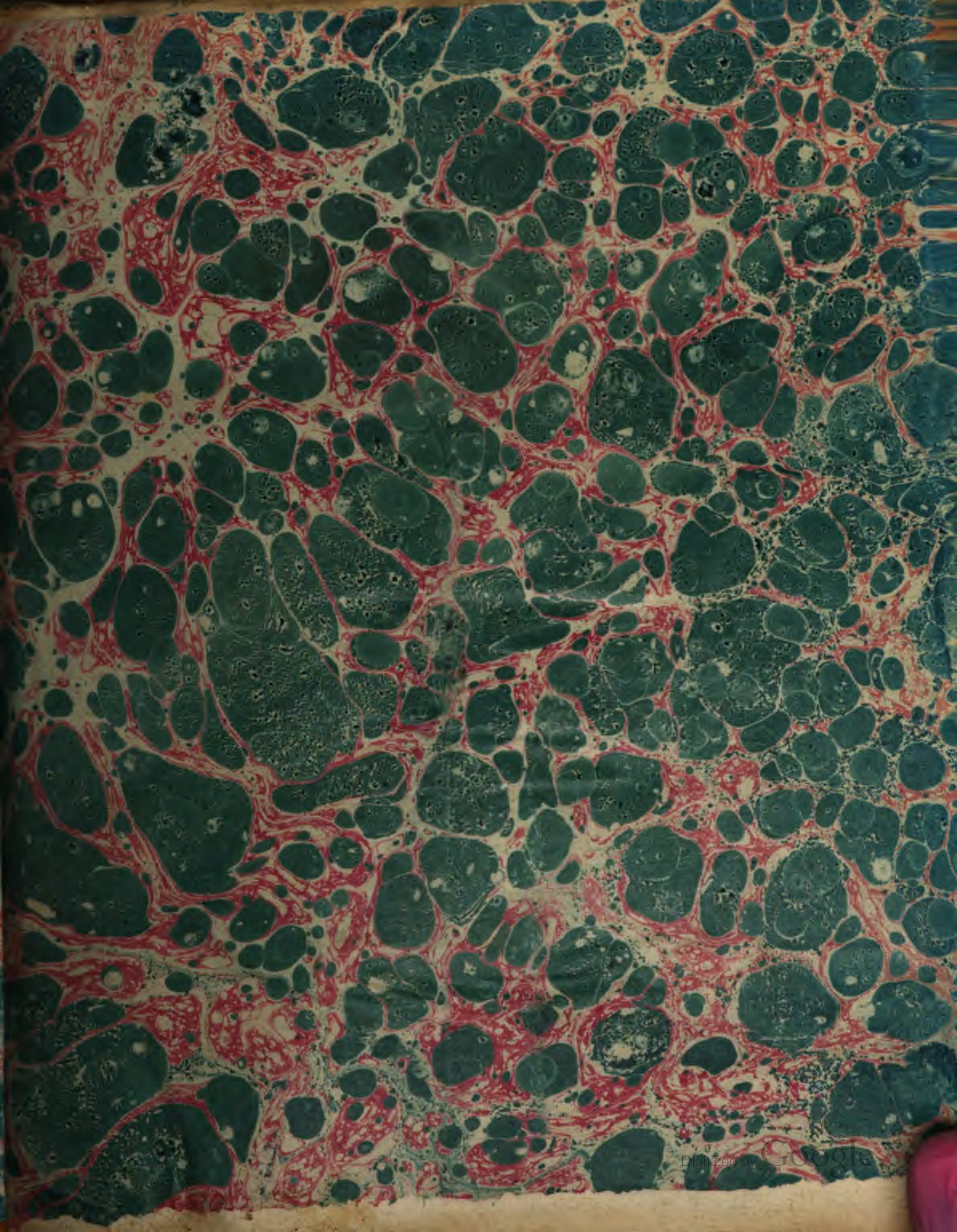










ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

CONDITIONS DE LA SOUSCRIPTION.

Depuis le mois de juillet 1810, ce recueil paraît régulièrement le 1.er de chaque mois, par livraisons d'environ 32 pages.

Les demandes d'abonnement, et le montant de la souscription peuvent être indifféremment adressés, franc de port,

Au bureau des *Annales*, rue d'Avignon, n.° 130, à Nismes, département du Gard;

Ou à la dame Veuve *Courcier*, libraire pour les mathématiques, quai des Augustins, n.° 57, à Paris.

Le prix de la souscription annuelle est 21 fr. pour toute l'étendue de l'Empire, et 24 fr. pour l'étranger; on peut ne souscrire que pour six mois, en payant la moitié du prix de la souscription annuelle: chacun des deux premiers volumes coûte 3 fr. au-dessous du prix de l'abonnement courant; le tout franc de port.

AVIS au Relieur,

Sur le placement des Planches.

Planche	I.	Après la page	32.
	II.		96.
	III.		132.
	IV.		196.
	V.		288.
	VI.		324.
	VII.		384.

ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

RECUEIL PÉRIODIQUE,

RÉDIGÉ

Par J. D. GERGONNE et J. E. THOMAS-LAVERNÈDE.

TOME SECOND.

A NISMES,

DE L'IMPRIMERIE DE P. BLACHIER-BELLE.

Et se trouve à PARIS, chez la dame Veuve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n.° 57.

1811 ET 1812.





ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

ASTRONOMIE.

Recherches sur la détermination des orbites des corps célestes ;

Par M. Gergonne.



PREMIÈRE PARTIE.

Détermination des orbites des corps célestes, par quatre ou un plus grand nombre d'observations voisines.

La méthode que je vais tracer, dans cette première partie, est directe ; elle est fondée sur la plus saine théorie ; et elle réduit au premier degré un problème généralement regardé comme très-difficile. Néanmoins, on la jugera peut-être plus curieuse qu'utile. Elle suppose, en effet, que l'on a au moins quatre observations complètes de l'astre dont il s'agit de déterminer les élémens ; elle suppose, de plus, que

l'intervalle de temps qu'embrassent ces observations n'est pas très-considérable ; elle suppose, enfin, que ces observations sont assez exactes pour qu'il soit permis de compter sur les troisièmes différences des données qu'elles auront fournies ; et l'on sent que ce sont là autant de circonstances très-difficiles à réunir.

C'est donc moins dans la vue des applications pratiques que j'indique ici cette méthode, que pour montrer 1.° quelle influence exerce, dans la solution du problème, la considération des lois du mouvement auquel l'observateur est assujetti ; 2.° quel parti on peut tirer de la méthode des différences dans les applications de l'analise ; 3.° enfin, combien il importe de perfectionner l'art d'observer, puisque des observations plus exactes, en même temps qu'elles conduisent à des résultats plus précis, permettent, dans la recherche de ces résultats, de substituer, à des tâtonnemens toujours incommodes et souvent très-compliqués, des méthodes directes extrêmement simples.

Toutefois, à ne considérer même la méthode que je vais sommairement présenter que comme propre seulement à fournir une approximation grossière, peut-être serait-elle encore de beaucoup préférable à toutes celles qui reposent sur l'hypothèse d'un mouvement sensiblement rectiligne et uniforme, pendant l'intervalle de temps qu'embrassent les observations ; hypothèse tout à fait illusoire, comme M. Lagrange l'a prouvé dans l'un de ses mémoires sur la détermination des orbites des comètes, et comme je l'ai fait voir, par de nouvelles considérations, dans un mémoire que j'ai lu, il y a quelques mois, à l'académie du Gard (*). J'ajouterai qu'en réduisant ainsi le problème au premier degré, en même temps qu'on le simplifie, on élude une discussion, toujours pénible, et souvent très-délicate, entre les diverses solutions que peut admettre un problème d'un degré plus élevé ; ce qui me paraît être un avantage très-précieux.

(*) J'ai prouvé, entre autres choses, dans ce mémoire, que, dans l'hypothèse d'un mouvement sensiblement rectiligne et uniforme, les mêmes données pouvaient répondre à une infinité de trajectoires différentes.

Je montrerai, au surplus, dans la seconde partie de ce mémoire, que, même en n'employant seulement que les premières et secondes différences des données fournies par les observations, le problème de la détermination des élémens du mouvement d'un astre, n'est que du troisième degré, si l'orbite de cet astre est assez alongée pour pouvoir être considérée comme sensiblement parabolique, et qu'il n'est que du second degré seulement si, au contraire, le peu d'excentricité de cette orbite permet de la considérer comme circulaire; de manière que le cas où l'excentricité n'est ni très-grande ni très-petite, c'est-à-dire, le cas le plus rare dans la nature, est le seul où le problème, même pour une première approximation, soit inévitablement du septième degré. Mais ces simplifications ne peuvent avoir lieu qu'autant qu'on emploie concurremment les premières et secondes différences tant des longitudes que des latitudes observées, ce que l'extrême précision que l'on apporte aujourd'hui dans les observations, semble d'ailleurs suffisamment autoriser, du moins dans un grand nombre de cas.

Les seules suppositions que je me permettrai dans ce qui va suivre, et elles sont indispensables pour le but que j'ai en vue, sont 1.° que les observations sont faites au centre même de la terre; 2.° que le centre du soleil est dans une immobilité parfaite; 3.° que les masses de la terre et de l'astre observé peuvent être considérées comme nulles, par rapport à la sienne; 4.° que conséquemment ces deux corps n'exercent aucune attraction l'un sur l'autre; 5.° qu'enfin il n'existe, d'autre part, aucune cause perturbatrice du mouvement. Au surplus, si l'on en excepte, peut-être, la belle méthode de M. Gauss, il n'en est aucune qui ne soit fondée sur ces diverses hypothèses.

A l'avenir, lorsque j'emploirai les coordonnées rectangulaires, le centre du soleil sera l'origine; la ligne des équinoxes sera l'axe des x; celle des solstices sera l'axe des y; l'axe de l'écliptique sera celui des z, et l'angle des coordonnées positives sera compris entre Ariés, le Cancer et le pôle boréal de l'écliptique. Je prendrai le jour moyen pour unité de temps, la distance moyenne du soleil à la terre pour unité de longueur, et l'angle droit pour unité de mesure des angles,

Enfin, je considérerai les latitudes comme positives ou comme négatives, suivant qu'elles seront boréales ou australes.

I. Cela posé, soient, pour une époque quelconque t,

X, Y, Z, les coordonnées d'un astre observé, et R son rayon vecteur;

x, y, les coordonnées de la terre, et r son rayon vecteur;

α, sa longitude, ou celle du soleil augmentée de deux angles droits;

β, γ, les longitude et latitude géocentriques de l'astre.

Il est aisé de voir qu'on aura

$$X = r\,\mathrm{Cos.}\alpha + Z\,\mathrm{Cos.}\beta\,\mathrm{Cot.}\gamma\ ,$$
$$Y = r\,\mathrm{Sin.}\alpha + Z\,\mathrm{Sin.}\beta\,\mathrm{Cot.}\gamma\ ;$$

on aura d'ailleurs

$$(1)\qquad x = r\,\mathrm{Cos.}\alpha\ ,\qquad\qquad (2)\qquad y = r\,\mathrm{Sin.}\alpha\ ;$$

posant donc, en outre,

$$p = \mathrm{Cos.}\beta\,\mathrm{Cot.}\gamma\ ,\qquad\qquad q = \mathrm{Sin.}\beta\,\mathrm{Cot.}\gamma\ ,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(3)\qquad p\,\mathrm{Sin.}\gamma = \mathrm{Cos.}\beta\,\mathrm{Cos.}\gamma\ ,\qquad\qquad (4)\qquad q\,\mathrm{Sin.}\gamma = \beta\,\mathrm{Cos.}\gamma\ ,$$

les deux équations ci-dessus deviendront

$$(5)\qquad X = x + pZ\ ,$$
$$(6)\qquad Y = y + qZ\ .$$

II. Soit considéré le temps comme variable indépendante, et soient adoptées, pour plus de simplicité, les notations de M. Lagrange. En différentiant trois fois chacune des deux équations (5, 6), il viendra.

$$(7)\qquad X' = x' + p'Z + pZ'\ ,$$
$$(8)\qquad Y' = y' + q'Z + qZ'\ ;$$
$$(9)\qquad X'' = x'' + p''Z + 2p'Z' + pZ''\ ,$$
$$(10)\qquad Y'' = y'' + q''Z + 2q'Z' + qZ''\ ;$$
$$(11)\qquad X''' = x''' + p'''Z + 3p''Z' + 3p'Z'' + pZ'''\ ,$$
$$(12)\qquad Y''' = y''' + q'''Z + 3q''Z' + 3q'Z'' + qZ'''\ .$$

Mais, par le *principe des aires*, on a

$$\left.\begin{aligned}(13)\ & XY''-YX''=0,\\ (14)\ & YZ''-ZY''=0,\\ (15)\ & ZX''-XZ''=0,\end{aligned}\right\}\text{d'où}\left\{\begin{aligned}(16)\ & XY'''-YX'''+X'Y''-Y'X''=0,\\ (17)\ & YZ'''-ZY'''+Y'Z''-Z'Y''=0,\\ (18)\ & ZX'''-XZ'''+Z'X''-X'Z''=0.\end{aligned}\right.$$

Dans chaque colonne, chacune des équations est comportée par les deux autres, en sorte que les six équations n'équivalent réellement qu'à quatre ; mais, réunies aux huit équations (5, 6, ..., 11, 12), elles sont en nombre suffisant pour déterminer les douze inconnues

$$\begin{array}{cccc} X, & X', & X'', & X''';\\ Y, & Y', & Y'', & Y''';\\ Z, & Z', & Z'', & Z'''.\end{array}$$

III. On a aussi, en vertu du même principe,

$$(19)\quad xy''-yx''=0\,,\quad \text{d'où}\quad (20)\quad xy'''-yx'''+x'y''-y'x''=0\,;$$

et, bien que ces deux dernières équations n'expriment que de simples relations entre les données du problème, leur considération n'en est pas moins très-importante, à raison des simplifications qu'elles introduisent dans la recherche des valeurs des inconnues.

IV. Pour parvenir aux valeurs de ces inconnues d'une manière simple, soient d'abord substituées, dans l'équation (19), les valeurs de x, x'', y, y'', données par les équations (5, 6, 9, 10), il viendra

$$(X-pZ)(Y''-q''Z-2q'Z'-qZ'')-(Y-qZ)(X''-p''Z-2p'Z'-pZ'')=0\,,$$

équation qui, en vertu des équations (5, 6), peut être écrite ainsi

$$\left.\begin{aligned}&(X-pZ)(Y''-qZ'')-x(q''Z+2q'Z')\\ -&(Y-qZ)(X''-pZ'')+y(p''Z+2p'Z')\end{aligned}\right\}=0.$$

En développant la partie

$$(X-pZ)(Y''-qZ'')-(Y-qZ)(X''-pZ'')$$

de cette équation, et l'ordonnant par rapport à p et q, on voit qu'elle

s'évanouit, en vertu des équations (13, 14, 15), en sorte que l'équation devient simplement

$$(21) \qquad (p''y-q''x)Z+2(p'y-q'x)Z'=0.$$

V. Soient, en second lieu, substituées dans l'équation (20) pour

$$x\,,\; x'\,,\; x''\,,\; x'''\,;$$

$$y\,,\; y'\,,\; y''\,,\; y'''\,;$$

leurs valeurs données par les équations (5, 6, ..., 11, 12), il viendra

$$\left.\begin{array}{l}(X-pZ)(Y'''-q'''Z-3q''Z'-3q'Z''-qZ''')+(X'-p'Z-pZ')(Y''-q''Z-2q'Z'-qZ'')\\-(Y-qZ)(X'''-p'''Z-3p''Z'-3p'Z''-pZ''')-(Y'-q'Z-qZ')(X''-p''Z-2p'Z'-pZ'')\end{array}\right\}=0.$$

Cette équation peut d'abord, en vertu des équations (5, 6, 7, 8, 9, 10), être écrite ainsi :

$$\left.\begin{array}{c}(X-pZ)(Y'''-qZ''')-(Y-qZ)(X'''-pZ''')+(X'-pZ')(Y''-qZ'')-(Y'-qZ')(X''-pZ'')\\-x(q'''Z+3q''Z'+3q'Z'')-(x'+p'Z)(q''Z+2q'Z')-p'y''Z\\+y(p'''Z+3p''Z'+3p'Z'')+(y'+q'Z)(p''Z+2p'Z')+q'x''Z\end{array}\right\}=0.$$

En développant la première ligne, et l'ordonnant par rapport à p et q, on voit qu'elle s'évanouit, en vertu des équations (16, 17, 18); le surplus de l'équation est, en réduisant,

$$(22)\left\{\begin{array}{l}(p'''y-q'''x)\\+(p''y'-q''x')\\-(p'y''-q'x'')\end{array}\right|Z+\left.\begin{array}{l}3(p''y-q''x)\\+2(p'y'-q'x')\end{array}\right|Z'+3(p'y-q'x)Z''-(p'q''-q'p'')Z=0.$$

VI. Soit enfin différentiée l'équation (21); on aura ainsi

$$(23)\left\{\begin{array}{l}(p'''y-q'''x)\\+(p''y'-q''x')\end{array}\right|Z+\left.\begin{array}{l}3(p''y-q''x)\\+2(p'y'-q'x')\end{array}\right|Z'+2(p'y-q'x)Z''=0.$$

Eliminant alors Z'', entre les équations (22, 23), il viendra

$$(24)\quad \left.\begin{array}{l}(p'''y-q'''x)\\+(p''y'-q''x')\\+2(p'y''-q'x'')\end{array}\right|Z+\left.\begin{array}{l}3(p''y-q''x)\\+2(p'y'-q'x')\end{array}\right|Z'+2(p'q''-q'p'')Z^2=0.$$

Eliminant enfin Z' entre les équations (21, 24), et divisant par Z l'équation résultante, on en tirera

$$Z=\frac{3(p''y-q''x)^2-4(p'y-q'x)(p'y''-q'x'')-2(p'q''-q'p'')(xy'-yx')-2(p'y-q'x)(p'''y-q'''x)}{4(p'q''-q'p'')(p'y-q'x)}.$$

VI. Pour calculer cette valeur de Z, il faudra d'abord, à l'aide des valeurs de r et ω qui répondent à l'époque t, et que donneront les éphémérides, et par les lois connues du mouvement de la terre, déterminer r', r'' et ω'; d'où, par les équations (1, 2), et leurs différentielles premières et secondes, on conclura, pour la même époque, les valeurs de x', y', x'', y'', dont les dernières, en vertu de l'équation (19), ne renfermeront pas ω''.

Ensuite, à l'aide de plusieurs longitudes et latitudes observées, dans le voisinage de l'époque t, on calculera, par la méthode que M. Laplace a indiquée (*), les valeurs approchées, toujours pour l'époque t, de β, β', β'', β'''; γ, γ', γ'', γ'''. Recourant alors aux équations (3, 4), et à leurs différentielles des trois premiers ordres, on en conclura les valeurs correspondantes de p, p', p'', p'''; q; q', q'', q'''; au moyen de quoi tout se trouvera connu dans la valeur de Z.

Z étant ainsi déterminé, l'équation (21) fera connaître Z', et on obtiendra ensuite X, X', Y, Y', par les équations (5, 6, 7, 8). Appelant donc R le rayon vecteur, pour l'époque t, on aura

$$R^2=X^2+Y^2+Z^2;$$

de plus, en formant la quantité

$$XX'+YY'+ZZ',$$

(*) Voyez *Mécanique céleste*, tom. 1, pag. 199.

suivant qu'on la trouvera positive ou négative, on saura que l'époque t suit ou précède celle du périhélie.

VII. Ces préliminaires établis ; rien ne sera plus facile que de déterminer les élémens de l'orbite, en suivant la marche tracée par l'illustre auteur de la *Mécanique céleste* (*) et qui revient à peu près à ce qui suit :

Soient posés

$$YZ'-ZY'=A,\quad X\left\{\frac{\mu}{R}-(Y'^2+Z'^2)\right\}+X'(YY'+ZZ')=D,$$

$$ZX'-XZ'=B,\quad Y\left\{\frac{\mu}{R}-(Z'^2+X'^2)\right\}+Y'(ZZ'+XX')=E,$$

$$XY'-YX'=C,\quad Z\left\{\frac{\mu}{R}-(X'^2+Y'^2)\right\}+Z'(XX'+YY')=F;$$

équations dans lesquelles, en désignant par S la durée de l'année sydérale, on a

$$\mu=\frac{4\pi^2}{S^2};$$

posant, en outre,

$$A^2+B^2+C^2=G^2,\qquad D^2+E^2+F^2=H^2,$$

on trouvera

1.° demi-grand axe $=\dfrac{\mu R}{2\mu-R(X'^2+Y'^2+Z'^2)}$;

2.° rapport de l'excentricité au demi-grand axe $=\dfrac{H}{\mu}$;

3.° Tang. Long. du nœud ascendant $=-\dfrac{A}{B}$;

4.° Tang. inclinaison de l'orbite $=-\dfrac{\sqrt{A^2+B^2}}{C}$;

(*) Voyez *Mécanique céleste*, tome 1, page 160.

5.°

5.° Tang. Long. du périhélie sur l'écliptique $=\frac{E}{D}$;

6.° Cos. anomalie vraie $=\frac{DX+EY+FZ}{HR}$;

enfin, désignant par a le demi-grand axe, par e le rapport de l'excentricité à ce demi-grand axe, par v l'anomalie, et posant

$$\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\text{Tang.}\tfrac{1}{2}v=\text{Tang.}\tfrac{1}{2}u\ ,$$

on aura

7.° Epoque du périhélie $=t\pm(u-e\,\text{Sin.}u)\sqrt{\frac{a^3}{k}}$; le signe $+$ ou le signe $-$ devant être pris, suivant que l'époque t précède ou suit celle du périhélie.

DEUXIÈME PARTIE.

Détermination des orbites des corps célestes, par trois ou un plus grand nombre d'observations voisines.

Dans la première partie de ce mémoire, je n'ai fait uniquement usage que du principe des aires, et il m'a fallu, pour suppléer aux autres circonstances connues du mouvement des corps célestes, recourir aux troisièmes différences des longitudes et latitudes observées, ce qui supposait quatre observations au moins. Ici j'aurai indifféremment recours à toutes les lois qui résultent du principe de la gravitation, ce qui n'exigera plus que l'emploi des secondes différences, et ne supposera pas conséquemment que les observations doivent être au nombre de plus de trois. Je conserverai d'ailleurs les conventions et notations déjà adoptées dans la première partie.

VIII. L'équation (21) donne

$$(25)\qquad Z'=-\frac{p''y-q''x}{2(p'y-q'x)}Z\ ,$$

d'où résultent, par les équations (7, 8)

$$(26) \qquad X' = x' + \left\{ p' - \frac{p(p''y - q''x)}{2(p'y - q'x)} \right\} Z \; ,$$

$$(27) \qquad Y' = y' + \left\{ q' - \frac{q(p''y - q''x)}{2(p'y - q'x)} \right\} Z \; ;$$

si ensuite on substitue dans l'équation (13) les valeurs données par les équations (5, 6, 9, 10), en ayant égard aux équations (19, 21), il viendra

$$(py - qx)Z'' = (py'' - qx'')Z + (pq'' - qp'')Z^2 + 2(pq' - qp')ZZ' \; ,$$

multipliant cette équation par $p'y - q'x$ et éliminant Z' au moyen de l'équation (21), il viendra

$$(py - qx)(p'y - q'x)Z =$$

$$(p'y - q'x)(py'' - qx'')Z + \{(pq'' - qp'')(p'y - q'x) - (pq' - qp')(p''y - q''x)\}Z^2 \; ;$$

équation qui se réduit à

$$(py - qx)(p'y - q'x)Z'' =$$

$$(p'y - q'x)(py'' - qx'')Z + (p'q'' - q'p'')(py - qx)Z^2 \; ;$$

mais, en vertu de l'équation (19), on a

$$(p'y - q'x)(py'' - qx'') = (py - qx)(p'y'' - q'x'') \; ;$$

substituant donc et divisant par $py - qx$, on aura

$$(28) \qquad Z'' = \frac{Z\{(p'y'' - q'x'') + (p'q'' - q'p'')Z\}}{p'y - q'x} \; ;$$

d'où on conclura, par les équations (9, 10) et par la formule (25), en ayant toujours égard à l'équation (19),

$$(29) \qquad X'' = \frac{(x + pz)\{(p'y'' - q'x'') + (p'q'' - q'p'')Z\}}{p'y - q'x} \; ,$$

$$(30) \qquad Y''=\frac{(y+qZ)\{(p'y''-q'x'')+(p'q''-q'p'')Z\}}{p'y-q'x}.$$

Voilà donc X, Y, X', Y', Z', X'', Y'', Z'', déterminés en fonction de Z; et il est essentiel de remarquer 1.° que les valeurs de X, Y, X', Y' sont complètes du premier degré en Z; 2.° que celle de Z', aussi du premier degré en Z, ne renferme point de terme sans Z; 3.° que les valeurs de X'', Y'', sont complètes du second degré; 4.° enfin que celle de Z'', aussi du second degré en Z, ne renferme point de terme sans Z.

IX. Il nous faut donc une équation de plus pour déterminer nos inconnues, et le principe de la gravitation donne, comme l'on sait,

$$Z''^2(X^2+Y^2+Z^2)^3=\mu^2Z^2 ;$$

équation dans laquelle μ a la même valeur que nous lui avons déjà assignée (VII). Faisant donc les substitutions et divisant par Z^2 il viendra

$$(31) \qquad \{(p'x''-q'x'')+(p'q''-q'p'')Z\}^2\{(x+pZ)^2+(y+qZ)^2+Z^2\}^3$$
$$=\mu^2(p'y-q'x)^2.$$

Cette équation semble devoir monter au 8.me degré; mais elle ne s'élève réellement qu'au 7.me, comme nous allons le voir (*).

Le dernier terme de cette équation est

$$(p'y''-q'x'')^2(x^2-y^2)^3-\mu^2(p'y-q'x)^2 ;$$

mais, les lois du mouvement étant, pour la terre, les mêmes que pour l'astre observé, on a

$$x''=-\frac{\mu x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad y''=-\frac{\mu y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} ;$$

(*) Cette équation équivaut à celle qui a été donnée par M. Laplace. Voyez la *Mécanique céleste*, tome 1.er, page 209.

d'où

$$p'x''-q'y''=-\frac{\mu(p'x-q'y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

ce qui donne, en quarrant, chassant le dénominateur et transposant,

$$(p'x''-q'y'')^2(x^2+y^2)^3-\mu^2(p'y-q'x)^2=0;$$

d'où l'on voit en effet que, le dernier terme de l'équation (31) étant zéro, elle ne doit s'élever seulement qu'au septième degré.

Cette équation étant résolue, on en déduira les valeurs de Z', X, X', Y, Y', comme ci-dessus, et on achevera absolument le calcul comme il a été indiqué dans la première partie.

X. Nous allons montrer maintenant comment le problème se simplifie dans les cas les plus ordinaires, c'est-à-dire, dans les cas d'une très-grande ou d'une très-petite excentricité.

Supposons, en premier lieu, que le demi-grand axe soit assez grand pour pouvoir sensiblement être supposé infini, ou, ce qui revient au même, supposons que l'astre observé soit une comète; d'après l'expression que nous avons donnée du demi-grand axe, nous aurons alors

(32) $$2\mu=R(X'^2+Y'^2+Z'^2);$$

ce qui donnera, en quarrant et introduisant la valeur de R^2 en X, Y, Z,

(33) $$4\mu^2=(X^2+Y^2+Z^2)(X'^2+Y'^2+Z'^2)^2.$$

Il est aisé de voir que la substitution des valeurs de X, Y, X', Y', Z', ne fera monter cette équation, en Z, qu'au 6.me degré seulement (*); mais ce n'est pas la plus simple que l'on puisse employer, dans ce cas, pour parvenir à la solution du problème.

On a, en effet, par le principe de la gravitation, ainsi que nous l'avons déjà rappelé,

(*) Cette équation équivaut à celle qu'a donné M. Laplace. Voyez la *Mécanique céleste*, tome 1.er, page 216.

$$Z''(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}=-\mu Z,$$

et l'équation (32) peut d'ailleurs être mise sous cette forme

$$2\mu=(X'^2+X'^2+Z'^2)(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{1}{2}};$$

multipliant donc ces deux équations l'une par l'autre, il viendra, en réduisant et transposant

$$(34) \qquad 2Z''(X^2+Y^2+Z^2)+Z(X'^2+Y'^2+Z'^2)=0;$$

équation qui, par la substitution des valeurs de X, Y, X', Y', Z', Z'', ne s'élevera, en Z, qu'au troisième degré seulement; elle pourra donc être résolue directement, par les tables trigonométriques; et, si elle a toutes ses racines réelles, on n'admettra que celle d'entre elles qui satisfera à peu près à l'équation (31); l'hypothèse d'une orbite parabolique pourra être admise avec d'autant plus de fondement que cette valeur y satisfera d'une manière plus approchée (*).

On voit donc que, dans le cas de la parabole, on a une équation surabondante; on en pourrait faire usage pour éliminer les secondes différences soit des longitudes soit des latitudes géocentriques, et c'est ainsi qu'en use M. Laplace. Il résulte de là que cinq données seulement sont suffisantes pour la détermination complète des élémens du mouvement d'une comète.

XI. Supposons, en second lieu, que l'orbite soit assez peu excentrique pour pouvoir être sensiblement considérée comme circulaire, ainsi qu'il arrive pour la plupart des planètes, du moins lorsqu'on n'aspire qu'à une première approximation; dans ce cas, R et conséquemment R^2 devra être constant; on aura donc, à la fois,

$$(35) \qquad XX'+YY'+ZZ'=0,$$

(*) Les équations (32, 33) étant combinées entre elles, pourraient conduire à une équation du premier degré seulement qui serait, sans doute, fort difficile à obtenir; mais qui, par l'effet des réductions, pourrait peut-être devenir assez simple.

(36) $$X'^2+Y'^2+Z'^2+XX''+YY''+ZZ''=0.$$

Après les substitutions, ces équations seront, la première du second degré et la seconde du troisième, en Z; il sera donc facile d'en déduire une équation de relation entre les données du problème et une valeur de Z au premier degré. Cette valeur substituée dans l'équation (31) donnera une nouvelle équation de relation. Si ces deux équations se trouvent satisfaites, on sera assuré que l'orbite est en effet circulaire; et comme, par leur moyen, on pourra éliminer de la valeur de Z les secondes différences tant des longitudes que des latitudes géocentriques, il s'ensuit que deux observations seulement seront alors suffisantes pour résoudre complètement le problème.

XII. Considérons maintenant le cas où la trajectoire décrite serait rectiligne : on aurait alors

$$X=mZ+g, \qquad Y=nZ+h,$$

m, n, g, h étant des constantes; de là résulte

$$X'=mZ', \qquad Y'=Zn',$$

$$X''=mZ'', \qquad Y''=nZ'';$$

et par suite

$$X'Z''-Z'X''=0, \quad Y'Z''-Z'X''=0;$$

équations qui, en vertu des équations (14, 15), peuvent être changées en celles-ci

(37) $$XZ'-ZX'=0,$$ (38) $$YZ'-ZY'=0;$$

ces dernières prouvent qu'alors le mouvement est dirigé vers le soleil. Après les substitutions, ces équations ne seront que du premier degré en Z, et elles fourniront, avec l'équation (31), deux équations de condition qui serviront à vérifier l'hypothèse du mouvement rectiligne, et au moyen desquelles on pourra faire disparaître de la valeur de Z les se-

condes différences des longitudes et des latitudes observées ; ainsi, encore ici, deux observations suffiront pour résoudre complètement le problème.

XIII. Pour compléter cette théorie, il nous reste encore à examiner deux cas : ce sont 1.° celui où l'astre observé serait dans une immobilité parfaite ; 2.° celui où son mouvement serait à la fois rectiligne et uniforme. Dans le premier cas on a, à la fois,

$$X'=0\,,\quad Y'=0\,,\quad Z'=0\,,$$

$$X''=0\,,\quad Y''=0\,,\quad Z''=0\,;$$

et comme les équations du mouvement sont en général

$$X''+\frac{\mu X}{R^3}=0\,,\quad Y''+\frac{\mu Y}{R^3}=0\,,\quad Z''+\frac{\mu Z}{R^3}=0\,,$$

on voit qu'elles ne peuvent être satisfaites qu'autant que R est infini, c'est-à-dire, qu'autant qu'une au moins des trois coordonnées X, Y, Z, est elle-même infinie.

Les équations (7, 8) deviennent simplement dans ce cas

$$x'+p'Z=0\,,\qquad y'+q'Z=0\,,$$

d'où on tire

$$Z=-\frac{x'}{p'}=-\frac{y'}{q'}\,;$$

si donc ni p ni q ne sont infinis, c'est-à-dire, si γ n'est pas zéro, on devra avoir

$$\left.\begin{matrix}p'=0\,,\\ q'=0\,,\end{matrix}\right\}\text{ c'est-à-dire }\left\{\begin{matrix}p=Constante\,,\\ q=Constante\,;\end{matrix}\right.$$

d'où

$$\frac{q}{p}=\text{Tang.}\beta=Constante\,,$$

$$\sqrt{p^2+q^2}=\text{Cot.}\gamma=Constante\,;$$

ainsi les angles β, γ, doivent être les mêmes pour des observations faites à diverses époques. C'est, par exemple, ce qui arrive pour les étoiles fixes.

XIV. Dans le cas d'un mouvement à la fois rectiligne et uniforme, on a seulement

$$X''=0\ ,\quad Y''=0\ ,\quad Z''=0\ ;$$

ce qui suppose encore qu'une au moins des coordonnées X, Y, Z, est infinie, du moins en ayant égard à toutes les lois qui résultent du principe de la gravitation ; mais l'équation (28) donnant alors

$$Z=-\frac{p'y''-q'x''}{p'q''-q'p''}\ ;$$

si p ou q ne sont pas infinis, c'est-à-dire, si l'on n'a pas $\gamma=0$, on devra avoir

$$p'q''-q'p''=0\ ,$$

équation dont l'intégrale complète est

$$Mp+Nq=1\ ;$$

ou, par les équations (3, 4),

$$M\text{Cos.}\beta+N\text{Sin.}\beta=\text{Tang.}\gamma\ ;$$

on aura pareillement, pour deux autres observations,

$$M\text{Cos.}\beta_1+N\text{Sin.}\beta_1=\text{Tang.}\gamma_1\ ,$$

$$M\text{Cos.}\beta_2+N\text{Sin.}\beta_2=\text{Tang.}\gamma_2\ ,$$

éliminant les deux constantes M et N entre ces trois équations, on arrivera à l'équation de condition

$$\text{Sin.}(\beta_2-\beta_1).\text{Tang.}\gamma+\text{Sin.}(\beta_1-\beta).\text{Tang.}\gamma_2+\text{Sin.}(\beta-\beta_2).\text{Tang.}\gamma_1=0\ ;$$

et l'hypothèse d'un mouvement rectiligne et uniforme ne pourra être admise qu'autant que les données fournies par trois observations vérifieront cette dernière équation.

GÉOMÉTRIE.

GÉOMÉTRIE.

Solution d'un problème de géométrie, dépendant de la théorie des maximis *et* minimis ;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.



Problème. *Par un point donné de position, dans un angle connu, faire passer une droite de manière que sa partie interceptée entre les côtés de l'angle soit la moindre possible?* (*)

Soit ACA′ (fig. 1) un angle donné, et soit P un point donné entre les côtés de cet angle ; il s'agit de mener, par ce point P, une droite dont la partie interceptée dans l'angle ACA′ soit la moindre possible.

Solution. Soient XX′ et ZZ′ deux droites égales inscrites dans l'angle ACA′ et passant par P. De ce point comme centre, avec les rayons PZ et PX′, soient décrits deux arcs de cercle Zz et X′x′, compris dans les angles XPZ et X′PZ′.

Puisque $XX'=ZZ'$,

on doit avoir $Xz=Z'x'$.

Or, $\text{Lim.}Xz:Zz=1:\text{Tang.}X$,

$\text{Lim.}Zz:X'x'=PX:PX'$,

(*) Ce problème a été traité par M. Puissant, (*Recueil de diverses propositions*, etc., deuxième édition, pag. 423) ; mais son analise est toute différente de celle de M. *Lhuilier*.

(*Note des éditeurs.*)

$$\text{Lim.}X'x' : Z'x' = \text{Tang.}X' : 1 \;;$$

donc $$\text{Lim.}X z : Z'x' = PX.\text{Tang.}X' : PX'.\text{Tang.}X.$$

Donc, lorsque XX' est la plus petite, on doit avoir

$$PX.\,\text{Tang.}X' = PX'.\,\text{Tang.}X \;,$$

d'où $$PX : PX' = \text{Tang.}X : \text{Tang.}X'.$$

Par P soient menées à CA et CA′ des parallèles rencontrant ces droites en B et B′; et, par le même point soient menées aux mêmes droites des perpendiculaires les rencontrant en D et D′; on aura

$$PX : PX' :: BX : PB' :: BX : CB \;;$$

donc $$BX : CB :: \text{Tang.}X : \text{Tang.}X'.$$

Premier cas. Que l'angle C soit droit, on aura

$$\text{Tang.}X' = \text{Cot.}X \qquad \text{et} \qquad BX = BP\,\text{Cot.}X \;;$$

donc $$BP\,\text{Cot.}X : CB = \text{Tang.}X : \text{Cot.}X \;,$$

et par conséquent

$$\frac{CB}{BP} = \frac{\text{Cot.}^2X}{\text{Tang.}X} = \text{Cot.}^3X = \frac{BX^3}{BP^3} \;;$$

donc

$$BX^3 = CB.BP^2 \;;$$

on aura de même

$$B'X'^3 = CB'.B'P^2 = BP.CB^2.$$

Le problème sera donc résolu puisque BX et B′X′ seront donnés en fonctions de quantités connues, et on voit qu'il n'aura alors qu'une solution.

Deuxième cas. Que l'angle C ne soit pas droit. On parvient à une

équation du troisième degré (*) ; soit qu'on prenne pour inconnue la distance du point X à quelque point donné sur CB, soit qu'on prenne pour inconnues les tangentes des angles X ou X'.

Je vais, par exemple, chercher la position du point X, par sa distance à quelque point donné sur CB, et construire l'équation correspondante.

(*) On parvient à une équation fort simple en procédant comme il suit :

Soit ACB, (fig. 2) l'angle donné, soit P le point donné et soit enfin XY la droite cherchée. Soit mené CP=K ; soient faits Ang.PCA=α, Ang.PCB=β, Ang.CPX=θ ; on aura Ang.CPY=$\varpi-\theta$; donc

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ang.CXP}=\varpi-(\theta+\alpha)\,,\\ \text{Ang.CYP}=(\theta-\beta)\quad,\end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{array}{l}\text{Sin.CXP}=\text{Sin.}(\theta+\alpha)\,,\\ \text{Sin.CYP}=\text{Sin.}(\theta-\beta)\,,\end{array}\right.$$

donc

$$\text{PY}=\text{K}.\frac{\text{Sin.}\beta}{\text{Sin.}(\theta-\beta)}\,,\qquad \text{PX}=\text{K}.\frac{\text{Sin.}\alpha}{\text{Sin.}(\theta+\alpha)}\,;$$

et par conséquent

$$\text{XY}=\text{PY}+\text{PX}=\text{K}\left\{\frac{\text{Sin.}\beta}{\text{Sin.}(\theta-\beta)}+\frac{\text{Sin.}\alpha}{\text{Sin.}(\theta+\alpha)}\right\}=\text{K Sin.}(\alpha+\beta).\frac{\text{Sin.}\theta}{\text{Sin.}(\theta+\alpha)\text{Sin.}(\theta-\beta)}\,;$$

Il faudra donc, pour avoir la valeur de θ qui convient au *minimum*, égaler à zéro la différentielle de

$$\frac{\text{Sin.}\theta}{\text{Sin.}(\theta+\alpha)\text{Sin.}(\theta-\beta)}\,;$$

ce qui donnera

$$\text{Sin.}(\theta+\alpha)\text{Sin.}(\theta-\beta)\text{Cos.}\theta-\{\text{Sin.}(\theta+\alpha)\text{Cos.}(\theta-\beta)+\text{Sin.}(\theta-\beta)\text{Cos.}(\theta+\alpha)\}\text{Sin.}\theta=0.$$

En divisant cette équation par $\text{Sin.}(\theta+\alpha)\text{Sin}(\theta-\beta)\text{Sin.}\theta$ elle devient

$$\text{Cot.}\theta=\text{Cot.}(\theta+\alpha)+\text{Cot.}(\theta-\beta)\,;$$

équation équivalente à celle-ci

$$\text{Cot.}\theta=\frac{\text{Cot.}\alpha\text{Cot.}\theta-1}{\text{Cot.}\alpha+\text{Cot.}\theta}+\frac{\text{Cot.}\beta\text{Cot.}\theta+1}{\text{Cot.}\beta-\text{Cot.}\theta}\,,$$

laquelle devient, en chassant les dénominateurs et réduisant,

$$\text{Cot.}^3\theta+(2+\text{Cot.}\alpha\text{Cot.}\beta)\text{Cot.}\theta+(\text{Cot.}\alpha-\text{Cot.}\beta)=0\,;$$

équation du troisième degré, sans second terme.

(*Note des éditeurs.*)

On a, comme il vient d'être prouvé ci-dessus,

$$BX : CB = \mathrm{Cot.}X' : \mathrm{Cot.}X\ ;$$

or, $\mathrm{Cot.}X = \frac{DX}{PD}$, $\mathrm{Cot.}X' = \frac{D'X'}{PD'}$;

donc

$$BX : CB = \frac{D'X'}{PD'} : \frac{DX}{PD} = \frac{D'X'}{CB} : \frac{DX}{PB}\ (*)\ ;$$

et conséquemment

$$BX : PB = D'X' : DX = B'X' - B'D' : DX\ ,$$

$$= B'X' \times BX - B'D' \times BX : DX \times BX\ ,$$

$$= B'D' \times BE - B'D' \times BX : BX \times DX\ (**)\ ,$$

$$= B'D' \times EX : BX \times DX\ ;$$

donc

$$BX : PB = B'D' \times EX : BX \times DX\ ,$$

ou $BX^2 : PB \times B'D' = EX : DX = EX \times DX : DX^2$,

ou enfin $BX^2 : CB \times BD = EX \times DX : DX^2$ (***).

Sur ED, comme diamètre, soit décrit un cercle, et du point X soit

---

(*) A cause des triangles semblables PDB et PD'B'.

(**) Par les triangles semblables, on a les deux proportions

$B'X' : B'P = BP : BX$, $B'P : B'D' = BE : BP$; d'où $B'X' : B'D' = BE : BX$ ou $B'X' \times BX = B'D' \times BE$.

(***) A cause de $BD : B'D' = PB : PB'$ ou CB, qui donne

$$PB \times B'D' = CB \times BD.$$

(*Notes des éditeurs.*)

élevée à DE une perpendiculaire rencontrant en V la circonférence de ce cercle; on aura $EX \times DX = XV^2$; substituant donc dans la proportion ci-dessus, elle deviendra

$$BX^2 : CB \times BD = XV^2 : DX^2 ,$$

ou

$$BX : \sqrt{CB \times BD} = XV : DX ,$$

d'où

$$BX \times DX = XV \sqrt{CB \times BD}.$$

De là découle la construction suivante pour déterminer le point X.

Soit PB parallèle à CA′ rencontrant CA en B; soit PD perpendiculaire à CA; soit aussi PD′ perpendiculaire à CA′ et rencontrant CA en E. Sur DE comme diamètre, soit décrit un cercle; soit ensuite décrite la parabole qui est le lieu géométrique de l'équation $BXD \times X = XV \sqrt{CB \times BD}$; par le point V où cette parabole rencontre la circonférence du cercle soit abaissée une perpendiculaire VX sur CA; alors le pied X de cette perpendiculaire sera le point cherché; de manière qu'en menant par X et P une droite terminée en X′ à CA′, cette droite sera la plus petite de toutes celles qui, passant par P, se termineront à CA et CA′.

Remarque I.re L'équation PXTang.X′=PX′Tang.X devient indépendante de la nature des lignes entre lesquelles il faut inscrire la plus petite des droites qui passent par le point donné; en substituant aux angles X, X′ les angles que fait XX′ avec les tangentes menées par les points X, X′ aux courbes sur lesquelles ces points se trouvent situés.

Remarque II.me Lorsque le point P est sur la droite qui coupe l'angle ACA′ en deux parties égales, la plus petite des droites à inscrire est (comme il est connu) perpendiculaire à la droite CP.

Remarque II.me On pourrait obtenir le *minimum* proposé, en résolvant ce problème déterminé : *Inscrire à un angle donné une droite d'une longueur donnée passant par un point donné?* et en cherchant les limites résultant de la construction. Or, ce problème déterminé

est susceptible d'une construction élégante par le cercle et par l'hyperbole rapportés à ses asymptotes.

Remarque IV.me On ramène à peu près de la même manière à un problème déterminé les problèmes suivans: *Par un point donné, sur une surface, sphérique, et dans un angle sphérique formé sur cette surface; mener un arc de grand cercle dont la partie inscrite dans l'angle sphérique soit la plus petite, ou tel que l'aire ou le contour du triangle retranché soit un* minimum?

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solutions des deux problèmes proposés à la page 318 *du premier volume des* Annales;

Par MM. VECTEN, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Nismes, ROCHAT, professeur de navigation à St-Brieux, et FAUQUIER, élève du lycée de Nismes.

LES trois solutions de ces deux problèmes qui ont été reçues par les rédacteurs des *Annales*, ayant entre elles plusieurs points de ressemblance, on croit devoir, pour abréger, en rendre compte dans un seul article.

Le premier problème, comme on le va voir tout à l'heure, se ramène très-facilement à celui-ci:

LEMME. Deux cercles se coupant, sur un même plan, mener, par l'une quelconque de leurs intersections, une droite dont la partie interceptée entre les deux cercles soit d'une longueur donnée?

Soient O, O′ (fig. 3, 4, 5) les centres de deux cercles se coupant en C et D, et soit AB une droite donnée; il s'agit de mener par le point C une droite CA′ ou CA″ de manière que sa partie A′B′ ou A″B″, interceptée entre les deux cercles soit égale à AB.

Solution de M. Vecten.

Construction. A partir du centre O de l'un quelconque des deux cercles, (fig. 3) soit portée, sur la droite OO′ qui joint ce centre au centre O′ de l'autre cercle, une longueur OE=AB; soient tirées DO, DO′, et, par E, soit menée à la première de ces deux droites une parallèle coupant la seconde en *a*; du point D comme centre, et avec D*a* pour rayon, soit décrit un arc de cercle coupant en A′ et A″ le cercle dont le centre est O′; par ces points A′, A″, et par le point C soient menées des droites coupant en B′ et B″ le cercle dont le centre est O; ces deux droites seront les droites cherchées, en sorte qu'on aura A″B″=A′B′=AB.

Démonstration. Soient joints DA′, DB′, DA″, DB″, et par *a* soit menée à OO′ une parallèle coupant DO en *b*. Les angles DA′B′, DA″B″, ayant l'un et l'autre leurs sommets à la circonférence du cercle dont le centre est O′, ont également pour mesure la moitié de l'arc DA″C; ils sont donc égaux à DO′O et conséquemment à D*ab*. Pareillement les angles DB′A′, DB″A″, ayant l'un et l'autre leurs sommets à la circonférence du cercle dont le centre est O, ont également pour mesure la moitié de l'arc DB′C; ils sont donc égaux à DOO′ et conséquemment à D*ba*; les trois triangles A′DB′, A″DB″, *a*D*b*, sont donc semblables; ils sont de plus égaux, puisque, par construction, DA′=DA″=D*a*; donc A′B′=A″B″=*ab*=OE=AB, ainsi qu'il était exigé.

Limite du problème. Les points A′, A″, étant déterminés par l'intersection de la circonférence dont le centre est O′ avec une circonférence décrite du point D comme centre et avec D*a* pour rayon, il s'ensuit que le problème ne sera possible qu'autant que ces

deux circonférences se couperont, c'est-à-dire, qu'autant que Da n'excédera pas le double de DO$'$; ou, ce qui revient au même, qu'autant que ab=OE=AB n'excédera par le double de OO$'$; c'est-à-dire, qu'autant que la longueur donnée n'excédera pas le double de la distance entre les centres des cercles donnés. Si cette droite était précisément égale au double de cette distance, l'arc A$'a$A$''$ serait simplement tangent au cercle dont le centre est O$'$, et le problème n'aurait qu'une solution.

De là il est facile de conclure le théorème suivant : *De toutes les droites menées par l'une des intersections de deux cercles, et terminées à l'un et à l'autre, la plus grande est parallèle à la droite qui joint les centres, et double de cette droite.*

Solution de M. Fauquier.

La solution de M. Fauquier diffère peu de celle de M. Vecten. Il mène par le point C (*fig.* 4) une droite quelconque terminée en m, m' respectivement aux circonférences dont les centres sont O, O$'$; ayant tiré Dm, Dm', et coupé sur mm' une partie mE=AB ; il tire par E parallèlement à mD, une droite coupant m'D en a ; il décrit alors du point D comme centre, et avec Da pour rayon, un arc dont les intersections A$'$, A$''$, avec la circonférence dont le centre est O$'$ sont les mêmes que les points désignés de la même manière dans la figure 3. Cette construction se démontre en conduisant par a une parallèle à $m'm$, se terminant à Dm en b, et prouvant ensuite, à peu près comme le fait M. Vecten, que les trois triangles A$'$DB$'$, A$''$DB$''$, aDb, sont égaux. L'avantage de cette construction est qu'elle n'exige pas que les centres des cercles donnés soient connus.

Il est assez remarquable que tous les triangles construits sous les mêmes conditions que mDm' sont semblables, et que le plus grand de tous est celui qui a pour hauteur la corde commune aux deux cercles.

Solution de M. Rochat.

M. Rochat a traité le problème analitiquement de la manière suivante.

Soit

Soit prise pour axe des x la droite indéfinie qui passe par les centres des cercles donnés ; soient r, r', les rayons de ces cercles, et α, α', les abscisses de leurs centres, leurs équations seront

$$(x-\alpha)^2+y^2=r^2\ , \qquad (x-\alpha')^2+y^2=r'^2.$$

En retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on obtiendra, comme l'on sait, celle de la corde commune aux deux cercles ; on aura ainsi

$$2(\alpha-\alpha')x+(r^2-\alpha^2)-(r'^2-\alpha'^2)=0.$$

Si l'on veut profiter de l'indétermination de α et α' pour faire en sorte que la corde commune aux deux cercles devienne l'axe des y, il faudra, dans cette équation, faire $x=0$, ce qui donnera l'équation de relation

$$r^2-\alpha^2=r'^2-\alpha'^2\ ;$$

posant donc

$$\left.\begin{array}{l} r^2-\alpha^2=\beta^2\ , \\ r'^2-\alpha'^2=\beta^2\ ; \end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{array}{l} r^2=\beta^2+\alpha^2\ , \\ r'^2=\beta^2+\alpha'^2\ ; \end{array}\right.$$

les équations des deux cercles deviendront

$$x^2-2\alpha x+y^2=\beta^2\ , \qquad x^2-2\alpha' x+y^2=\beta^2\ ;$$

et, comme elles sont satisfaites l'une et l'autre par

$$x=0\ , \qquad y=\pm\beta\ ,$$

il en faut conclure que $\pm\beta$ est l'ordonnée de l'intersection des deux cercles et conséquemment la moitié de leur corde commune.

Présentement, toute droite passant par l'intersection dont l'ordonnée est $+\beta$, aura une équation de la forme

$$y=ax+\beta\ ,$$

dans laquelle a est tangente de son inclinaison sur l'axe des x ; en combinant successivement cette équation avec celles des deux cercles, on

obtient pour les coordonnées des intersections de la droite avec chacun d'eux les valeurs suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{2(\alpha-a\beta)}{1+a^2}, \\ y=a\dfrac{2(\alpha-a\beta)}{1+a^2}+\beta; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{2(\alpha'-a\beta)}{1+a^2}, \\ y=a\dfrac{2(\alpha'-a\beta)}{1+a^2}+\beta; \end{array}\right.$$

si donc on veut que la portion de cette droite interceptée entre les deux cercles soit d'une longueur donnée K, on devra avoir

$$K^2=\left\{\frac{2(\alpha-a\beta)}{1+a^2}-\frac{2(\alpha'-a\beta)}{1+a^2}\right\}^2+a^2\left\{\frac{2(\alpha-a\beta)}{1+a^2}-\frac{2(\alpha'-a\beta)}{1+a^2}\right\}^2.$$

ou

$$K^2=\frac{4(\alpha-\alpha')^2}{1+a^2} \quad \text{d'où} \quad a=\pm\frac{\sqrt{4(\alpha-\alpha')^2-K^2}}{K};$$

telle est donc la tangente de l'angle qui doit faire la droite cherchée avec l'axe des x, d'où l'on voit que le problème aura en général deux solutions; à cause du double signe du radical; on voit de plus qu'il ne pourra être résolu si l'on a $K>2(\alpha-\alpha')$, c'est-à-dire, si la longueur donnée surpasse le double de la distance des centres; on voit enfin que, si K est indéterminé, la plus grande valeur qu'il pourra avoir sera $2(\alpha-\alpha')$, c'est-à-dire, le double de distance entre les centres, auquel cas, a étant nulle, la droite cherchée devra être parallèle à l'axe des x. Ainsi, si l'on proposait de mener, par l'une des intersections de deux cercles, une droite de telle manière que la partie de cette droite interceptée entre les deux cercles fût la plus grande possible, on résoudrait le problème en menant par ce point une parallèle à la droite qui joint les centres; et la partie interceptée serait double de la distance entre ces centres.

La valeur générale de a fournit cette construction : soient EX (fig. 5) la droite qui joint les centres, et EY la direction de la corde commune, de manière que E soit le point d'intersection de ces deux droites. Soit prise sur EX, à partir de E, une partie EF égale à la longueur donnée

AB; du point F comme centre, et avec le double de la distance OO′ des centres pris pour rayon, soit décrit un arc coupant EY en G et H, et soient menés FG, FH; en tirant par C des parallèles à ces deux droites, rencontrant les deux circonférences, l'une en A′, B′ et l'autre en A″, B″, on aura A″B″ = A′B′ = AB.

PROBLÈME I. Construire un triangle qui soit égal à un triangle donné, et dont les côtés, prolongés s'il est nécessaire, passent respectivement par trois points donnés.

Il est entendu que l'on désigne à l'avance ceux des points donnés par lesquels doivent passer respectivement les côtés ou prolongemens de côtés du triangle donné. Mais, s'il en était autrement, il arriverait seulement que le nombre des solutions du problème en deviendrait, en général, six fois plus grand, comme l'a observé M. Rochat.

Soient donc ABC (fig. 6) un triangle donné, et *a*, *b*, *c*, trois points donnés, il s'agit de construire un triangle égal à ABC, et tellement situé que le point *a* soit sur la direction du côté égal à BC, le point *b* sur la direction du côté égal à AC, et le point *c* sur la direction du côté égal à AB.

Solution. MM. Vecten, Rochat et Fauquier ont également réduit la solution du problème à ce qui suit.

Sur les distances *ca*, *cb*, de l'un quelconque *c* des points donnés aux deux autres *a*, *b*, prises pour corde, soient décrits des arcs respectivement capables des angles A, B, du triangle donné; par *c* soit menée (*Lemme*) une droite dont la portion interceptée entre les circonférences dont ces arcs font partie soit égale à AB; soient respectivement B′, A′, les points où cette droite coupe les circonférences passant par *a*, *b*; en menant B′*a* et A′*b* se coupant en C′, le triangle A′B′C′ sera le triangle cherché. Il est clair en effet que, par la construction, les points *a*, *b*, *c*, se trouveront respectivement sur les directions de ses côtés B′C′, C′A′, A′B′; de plus son côté A′B′, et les deux angles adjacens se trouvant aussi, par construction, égaux au côté AB et aux deux angles adjacens du triangle donné, d'où il résulte que ces deux triangles sont égaux.

On peut, par le point *c*, mener de deux manières la droite dont la

portion interceptée entre les deux circonférences doit être égale à AB, ce qui fournit déjà deux solutions du problème : cette observation a été également faite par MM. Vecten, Rochat et Fauquier. M. Vecten a remarqué de plus que les arcs capables des angles B et A pouvaient être indifféremment décrits de l'un ou de l'autre côté de *ca* et *cb*, ou, ce qui revient au même, qu'on pouvait décrire d'un même côté de ces droites, des arcs capables tant des angles B et A que des supplémens de ces angles, ce qui donne lieu à quatre solutions du problème. A la vérité, les deux arcs décrits sur *ca* peuvent être combinés avec les deux arcs décrits sur *cb* de quatre manières différentes, ce qui semblerait devoir conduire à huit solutions du problème ; mais il est facile de se convaincre que des quatre combinaisons dont ces arcs sont susceptibles, il n'y en a que deux seulement qui donnent un triangle égal au triangle ABC. Les deux autres donnent un triangle dont un côté est égal au côté AB de ce triangle, et dont un des angles adjacens est égal à un des angles A, B, mais dont le second est supplément de l'autre. La figure 7 représente les quatre solutions indiquées par M. Vecten ; on y a ponctué de la même manière les cercles qui doivent être combinés ensemble ; β, β' sont les centres de ceux qui sont décrits sur *ac*, et α, α' sont les centres de ceux qui sont décrits sur *bc*, de manière que les centres des cercles à combiner sont $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$.

M. Vecten a soin de remarquer que le problème ne peut avoir quatre solutions qu'autant que la moitié du côté donné AB sera moindre que la plus petite des deux distances $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$; que si elle est égale à cette distance, le nombre des solutions se réduira à trois ; qu'il n'y en aura que deux si $\frac{1}{2}$AB se trouve compris entre $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$; qu'il n'y en aura qu'une seule si $\frac{1}{2}$AB se trouve égal à la plus grande de ces deux distances ; et qu'enfin le problème sera impossible s'il la surpasse.

M. Rochat, en considérant que l'arc capable de l'angle C, construit sur la troisième distance *ab*, doit couper les deux premiers au même point, a déduit de cette observation les deux théorèmes suivans :

I. Trois points a, b, c, *étant pris respectivement d'une manière arbitraire sur les côtés* BC, CA, AB, *d'un triangle* ABC, *si l'on*

fait passer des circonférences par les systèmes de points a, b, C; *b*, c, A, c, a, B, *ces circonférences se couperont toutes en un même point.*

II. *Trois circonférences passant par un même point* P *et se coupant de plus deux à deux en des points* a, b, c, *il existe une infinité de triangles dont les côtés passent respectivement par ces trois points et dont les sommets sont respectivement sur les trois circonférences données. Tous ces triangles sont semblables entre eux et au triangle dont les sommets sont aux centres des trois cercles, et ils ont tous le point* P *pour point homologue commun. Le plus grand de tous est celui dont les côtés sont parallèles aux droites qui joignent deux à deux les centres des trois cercles.*

L'arc capable de l'angle C décrit sur *ab* peut, entre autres usages, servir à lever l'incertitude où l'on pourrait être sur la manière de combiner deux à deux les quatre arcs décrits sur *ca* et *cb*; on voit en effet, par ce qui précède, qu'il ne faudra prendre ensemble que ceux qui couperont ce troisième arc, décrit soit d'un côté soit de l'autre de *ab*, en un même point.

Les trois points donnés *a*, *b*, *c*, peuvent être situés sur une même ligne droite, et c'est un cas qui a été examiné par M. Vecten. Il n'y a alors aucun changement à faire dans la construction déjà indiquée. Il arrive seulement, dans ce cas particulier, que les deux distances que nous avons désignées par $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ sont égales, et que conséquemment, suivant que AB sera plus petit que le double de l'une d'elles, égal à ce double ou plus grand que ce double, le problème aura quatre solutions, deux solutions ou sera impossible.

PROBLÈME II. *Construire un triangle qui soit égal à un triangle donné et dont les sommets soient respectivement sur trois droites données?* (*)

(*) Ce problème a été traité par M. *Carnot* (Voyez *Géométrie de position*, page 277); mais l'auteur s'est contenté de donner une formule algébrique. Il a aussi été traité par *Newton* : voyez les *Principes*, livre I, lemme XXVI.

On suppose encore ici que l'on a désigné, à l'avance, les sommets qui doivent se trouver sur chacune des droites données, ce qui rend le nombre des solutions six fois moindre qu'il ne le serait si l'on pouvait indifféremment établir chaque sommet sur chacune des droites données.

MM. Vecten, Rochat et Fauquier ont également ramené ce problème au précédent, et il n'est pas difficile de voir que réciproquement le précédent pourrait être ramené à celui-ci. Voici donc à quoi se réduit la construction de ce dernier problème :

Soit ABC le triangle donné (fig. 8) et bc, ca, ab, trois droites données; il s'agit de construire un triangle égal au triangle ABC et dont les sommets des angles égaux à A, B, C, soient respectivement situés sur bc, ca, ab.

Construction. Soit construit (Problème I.) un triangle $a'b'c'$, égal à abc, et dont les côtés passent respectivement, savoir, $b'c'$ par A, $c'a'$ par B, $a'b'$ par C. Soient alors coupés bc, ca, ab, en A′, B′, C′, de la même manière que le sont $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$, en A, B, C; tirant alors A′B′, B′C′, C′A′, le triangle A′B′C′ sera le triangle demandé.

M. Vecten observe qu'en général quatre triangles pouvant se trouver dans les mêmes circonstances où se trouve le triangle $a'b'c'$, il s'ensuit que pareillement quatre triangles peuvent se trouver dans les mêmes circonstances où se trouve le triangle A′B′C′; c'est-à-dire, que ce second problème, comme le premier, peut admettre quatre solutions. La figure 9 représente ces quatre solutions, telles qu'elles ont été indiquées par M. Vecten.

M. Vecten observe ensuite que la construction indiquée ci-dessus devient illusoire toutes les fois que les trois droites données ne forment pas un triangle; ce qui peut arriver de diverses manières qu'il considère successivement.

1.° Il peut arriver (fig. 10) que les droites données O′A′, O′B′, O′C′, se coupent en un même point O′; alors décrivant sur deux quelconques CA, CB, des côtés du triangle donné, pris pour cordes, et du côté de l'intérieur de ce triangle, des arcs COA, COB, capables des

angles $C'O'A'$, $C'O'B'$, et tirant OC, OA, OB; en portant ces longueurs sur $O'C'$, $O'A'$, $O'B'$, de O' en C', A', B', et tirant $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$, le triangle $A'B'C'$ résoudra le problème. Ce problème a deux solutions; car, en prolongeant $A'O'$, $B'O'$, $C'O'$, au-delà du point O' des quantités $O'A''$, $O'B''$, $O'C''$, qui leur soient respectivement égales, et menant $A''B''$, $B''C''$, $C''A''$, le triangle $A''B''C''$ sera aussi égal au triangle ABC, et aura ses sommets sur les droites $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$.

2.° Il peut arriver (fig. 11) que deux aa', bb' des droites données soient parallèles, la troisième $C'C''$ les coupant respectivement en α et β; alors, l'angle égal à C dans le triangle cherché étant celui dont le sommet doit être sur $C'C''$, il faudra sur CA, CB, pris pour cordes, décrire des arcs respectivement capables des angles $\beta\alpha a'$ et $\alpha\beta b'$; menant ensuite par C (*Lemme*) deux droites dont les parties $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$, interceptées entre les deux arcs, soient égales à $\alpha\beta$, et tirant $\alpha'A$, $\alpha''A$, $\beta'B$, $\beta''B$, les deux dernières droites se trouveront, d'elles-mêmes, respectivement parallèles aux deux premières; coupant donc $\alpha\beta$ en C', C'' de la même manière que $\alpha'\beta'$ et $\alpha''\beta''$ le sont en C; et faisant de plus $\alpha A'$, $\alpha A''$, $\beta B'$, $\beta B''$, respectivement égales à $\alpha'A$, $\alpha''A$, $\beta'B$, $\beta''B$, et tirant $A'B'$, $B'C'$; $C'A'$, $A''B''$, $B''C''$, $C''A''$, les triangles $A'B'C'$, $A''B''C''$, seront deux solutions du problème. Au moyen de ces deux solutions on en obtiendra facilement deux autres, en imaginant que l'on fasse tourner les triangles $C'A'B'$, $C''A''B''$, autour de deux perpendiculaires à aa', bb', l'une passant par C' et l'autre par C''; les deux nouveaux triangles seront $C'A'''B'''$ et $C''A''''B''''$.

3.° Il peut enfin arriver que les trois droites données aa', bb', cc', (fig. 12) soient parallèles, et alors il est facile de comprendre que le triangle donné ne saurait être quelconque, et que, s'il est tel qu'il rende le problème possible, ce problème sera indéterminé. Si en effet le triangle $A'B'C'$ satisfait aux conditions du problème, en faisant glisser deux de ses sommets, suivant les parallèles sur lesquelles ils se trouveront situés, le troisième ne quittera pas la troisième de ces parallèles, et conséquemment le triangle satisfera toujours aux conditions du problème.

Supposant donc, pour rendre le problème possible, que les deux côtés CA, CB, du triangle CAB sont seuls donnés; de l'un quelconque C′ des points de cc' et avec CA, CB pris successivement pour rayons, on décrira deux arcs, le premier coupant aa' en A′, A″, et le second coupant bb' en B′, B″; tirant alors C′A′, C′A″, C′B′, C′B″, A′B′, A″B″, A″B′, A′B″, on formera les quatre triangles C′A′B′, C′A′B″, C′A″B″, C′A″B′, dont les deux derniers ne diffèrent des deux premiers que par leur situation entre les parallèles, et dont chacun, à cause de l'indétermination du point C, donnera lieu à une infinité de solutions.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. A un polygone rectiligne donné, inscrire un autre polygone rectiligne, d'un pareil nombre de côtés, équivalant à une surface donnée, et dont les côtés ou leurs prolongemens passent respectivement par un égal nombre de points donnés de position.

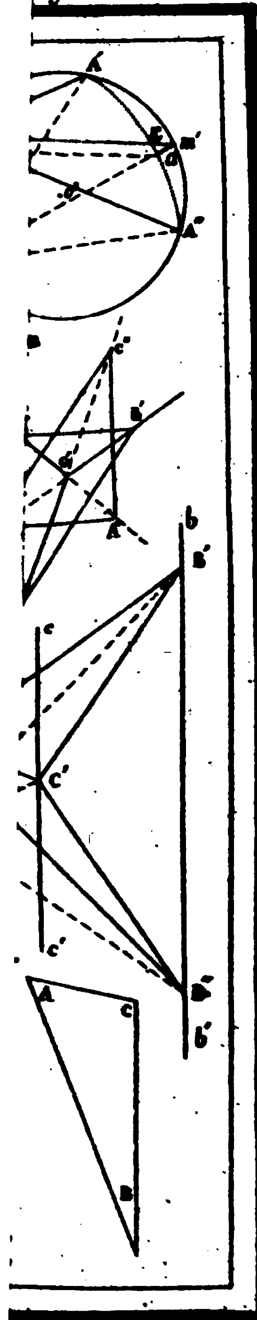
II. Construire un quadrilatère dans lequel on connaît les quatre côtés et la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés.

Théorème de Géométrie.

Les droites qui vont de l'un quelconque des points d'une hyperbole équilatérale aux deux extrémités d'un même diamètre transverse quelconque, sont également inclinées à l'une quelconque des asymptotes.

---

ag.1-33.



D.G. fecit.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Détermination de la longueur des axes principaux dans les surfaces du second ordre qui ont un centre ;

Par M. Bret, professeur de mathématiques transcendantes au lycée de Grenoble.



L'ÉQUATION générale des surfaces du second ordre est

$$Ax^2+A'y^2+A''Z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D=0.$$

Si on ne considère que les surfaces qui ont un centre, on pourra, en transportant l'origine des coordonnées à ce centre, faire disparaître de cette équation les premières puissances des variables x, y, z, et on obtiendra l'équation plus simple

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=H.$$

Substituons à x, y, z, les valeurs qui servent à passer du système de coordonnées rectangulaires x, y, z, à un autre système de coordonnées aussi rectangulaires x', y', z' ; et pour cela rappelons les formules connues

$$x=x'\text{Cos.}\alpha+y'\text{Cos.}\alpha'+z'\text{Cos.}\alpha'' ,$$

$$y=x'\text{Cos.}\beta+y'\text{Cos.}\beta'+z'\text{Cos.}\beta'' ,$$

$$z=x'\text{Cos.}\gamma+y'\text{Cos.}\gamma'+z'\text{Cos.}\gamma'' ;$$

ensuite les équations de condition

$$\left.\begin{array}{r}
\mathrm{Cos.}^2\alpha+\mathrm{Cos.}^2\beta+\mathrm{Cos.}^2\gamma=1\ ,\\
\mathrm{Cos.}^2\alpha'+\mathrm{Cos.}^2\beta'+\mathrm{Cos.}^2\gamma'=1\ ,\\
\mathrm{Cos.}^2\alpha''+\mathrm{Cos.}^2\beta''+\mathrm{Cos.}^2\gamma''=1\ ;\\
\mathrm{Cos.}\alpha\,.\mathrm{Cos.}\alpha'+\mathrm{Cos.}\beta\,.\mathrm{Cos.}\beta'+\mathrm{Cos.}\gamma\,.\mathrm{Cos.}\gamma'=0\ ,\\
\mathrm{Cos.}\alpha'\,.\mathrm{Cos.}\alpha''+\mathrm{Cos.}\beta'\,.\mathrm{Cos.}\beta''+\mathrm{Cos.}\gamma'\,.\mathrm{Cos.}\gamma''=0\ ,\\
\mathrm{Cos.}\alpha''.\mathrm{Cos.}\alpha+\mathrm{Cos.}\beta''.\mathrm{Cos.}\beta+\mathrm{Cos.}\gamma''.\mathrm{Cos.}\gamma=0\ ;
\end{array}\right\}\ (A)$$

lesquelles peuvent, comme l'on sait, être remplacées par les suivantes

$$\left.\begin{array}{r}
\mathrm{Cos.}^2\alpha+\mathrm{Cos.}^2\alpha'+\mathrm{Cos.}^2\alpha''=1\ ,\\
\mathrm{Cos.}^2\beta+\mathrm{Cos.}^2\beta'+\mathrm{Cos.}^2\beta''=1\ ,\\
\mathrm{Cos.}^2\gamma+\mathrm{Cos.}^2\gamma'+\mathrm{Cos.}^2\gamma''=1\ ;\\
\mathrm{Cos.}\alpha.\mathrm{Cos.}\beta+\mathrm{Cos.}\alpha'.\mathrm{Cos.}\beta'+\mathrm{Cos.}\alpha''.\mathrm{Cos.}\beta''=0\ ,\\
\mathrm{Cos.}\beta.\mathrm{Cos.}\gamma+\mathrm{Cos.}\beta'.\mathrm{Cos.}\gamma'+\mathrm{Cos.}\beta''.\mathrm{Cos.}\gamma''=0\ ,\\
\mathrm{Cos.}\gamma.\mathrm{Cos.}\alpha+\mathrm{Cos.}\gamma'.\mathrm{Cos.}\alpha'+\mathrm{Cos.}\gamma''.\mathrm{Cos.}\alpha''=0\ .
\end{array}\right\}\ (B)$$

Nous aurons, en faisant disparaître de la nouvelle équation les rectangles $x'y'$, $y'z'$, $z'x'$, ce qui est toujours possible (*), l'équation

$$Px'^2+P'y'^2+P''z'^2=H.$$

Nous allons maintenant chercher l'équation du troisième degré qui a pour racines P, P', P''.

On trouve cette équation, de la manière la plus simple, en passant de l'équation

$$Px'^2+P'y'^2+P''z'^2=H \qquad (I)$$

à celle-ci

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=H. \qquad (II)$$

(*) Voyez l'*Application de l'algèbre à la géométrie* de MM. *Monge* et *Hachette* ; voyez aussi la *Géométrie analitique de* M. *Biot*.

(*Note des éditeurs.*)

Pour cela posons les valeurs de x', y', z', en x, y, z, ces valeurs sont

$$x'=x\text{Cos.}\alpha+y\text{Cos.}\beta+z\text{Cos.}\gamma\ ,$$
$$y'=x\text{Cos.}\alpha'+y\text{Cos.}\beta'+z\text{Cos.}\gamma'\ ,$$
$$z'=x\text{Cos.}\alpha''+y\text{Cos.}\beta''+z\text{Cos}\gamma''\ .$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (I), et comparant celle qui en résulte à l'équation (II), on trouve

$$\left.\begin{array}{l} P\text{Cos.}^2\alpha+P'\text{Cos.}^2\alpha'+P''\text{Cos.}^2\alpha''=A\ , \\ P\text{Cos.}^2\beta+P'\text{Cos.}^2\beta'+P''\text{Cos.}^2\beta''=A'\ , \\ P\text{Cos.}^2\gamma+P'\text{Cos.}^2\gamma'+P''\text{Cos.}^2\gamma''=A''\ ; \end{array}\right\}\ \text{(C)}$$

$$\left.\begin{array}{l} P\text{Cos.}\beta.\text{Cos.}\gamma+P'\text{Cos.}\beta'.\text{Cos.}\gamma'+P''\text{Cos.}\beta''.\text{Cos.}\gamma''=B\ , \\ P\text{Cos.}\gamma.\text{Cos.}\alpha+P'\text{Cos.}\gamma'.\text{Cos.}\alpha'+P''\text{Cos.}\gamma''.\text{Cos.}\alpha''=B'\ , \\ P\text{Cos.}\alpha.\text{Cos.}\beta+P'\text{Cos.}\alpha'.\text{Cos.}\beta'+P''\text{Cos.}\alpha''.\text{Cos.}\beta''=B''\ . \end{array}\right\}\ \text{(D)}$$

Il est visible que l'on parviendra à l'équation dont les racines sont P, P', P'', en déterminant, au moyen des équations de condition, les valeurs de $P+P'+P''$, $PP'+P'P''+P''P$, $PP'P''$.

D'abord, si l'on ajoute les équations (C) on a, en vertu des équations (A),

$$P+P'+P''=A+A'+A''.$$

Pour simplifier les calculs suivans, je ferai usage des notations que voici

$$AA'+A'A''+A''A=\int AA'\ ,$$
$$P^2\text{Cos.}^2\beta.\text{Cos.}^2\gamma+P'^2\text{Cos.}^2\beta'.\text{Cos.}^2\gamma'+P''^2\text{Cos.}^2\beta''.\text{Cos.}^2\gamma''=\int P^2\text{Cos.}^2\beta\text{Cos.}^2\gamma\ ,$$

etc., etc., etc.

Cela posé, dans les équations (C), effectuons le produit AA', nous obtiendrons

$$AA'=\int P^2\text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}^2\beta+\int PP'(\text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}^2\beta'+\text{Cos.}^2\alpha'^2.\text{Cos.}^2\beta)\ ;$$

or, les équations (D) donnent

$$B''^2=\int P^2\text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}^2\beta+2\int PP'\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\alpha'\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\beta'\ ;$$

retranchant donc ce dernier résultat du précédent, on aura

$$AA'-B''^2=\int PP'(\text{Cos.}\alpha.\text{Cos.}\beta'-\text{Cos.}\alpha'.\text{Cos.}\beta)^2\ ;$$

on aura pareillement

$$A'A''-B^2=\int PP'(\text{Cos.}\beta.\text{Cos.}\gamma'-\text{Cos.}\beta'.\text{Cos.}\gamma)^2\ ,$$
$$A''A-B'^2=\int PP'(\text{Cos.}\gamma.\text{Cos.}\alpha'-\text{Cos.}\gamma'.\text{Cos.}\alpha)^2\ ;$$

donc

$$\int AA'-\int B^2=\int PP'\left\{\begin{array}{l}(\text{Cos.}\alpha.\text{Cos.}\beta'-\text{Cos.}\alpha'.\text{Cos.}\beta)^2\ ,\\+(\text{Cos.}\beta.\text{Cos.}\gamma'-\text{Cos.}\beta'.\text{Cos.}\gamma)^2\ ,\\+(\text{Cos.}\gamma.\text{Cos.}\alpha'-\text{Cos.}\gamma'.\text{Cos.}\alpha)^2\ .\end{array}\right.$$

Mais, si du produit des deux premières équations (A) on retranche le quarré de la quatrième, on aura

$$(\text{Cos.}\alpha.\text{Cos.}\beta'-\text{Cos.}\alpha'.\text{Cos.}\beta)^2+(\text{Cos.}\beta.\text{Cos.}\gamma'-\text{Cos.}\beta'.\text{Cos.}\gamma)^2+(\text{Cos.}\gamma.\text{Cos.}\alpha'-\text{Cos.}\gamma'.\text{Cos.}\alpha)^2=1\ ;$$

on a donc simplement

$$\int AA'-\int B^2=\int PP'\ ,\quad \text{ou}\quad \int PP'=\int AA'-\int B^2.$$

Il nous reste encore à trouver $PP'P''$; pour y parvenir formons le produit $AA'A''$, dans les équations (C), nous aurons

$$AA'A''=\left\{\begin{array}{l}\int P^3\text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}^2\beta.\text{Cos.}^2\gamma\ ,\\+\int P^2P'(\text{Cos.}\alpha.\text{Cos.}^2\beta.\text{Cos.}\gamma'+\text{Cos.}^2\beta.\text{Cos.}^2\gamma.\text{Cos.}^2\alpha'+\text{Cos.}^2\gamma.\text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}\beta')\ ,\\+KPP'P''\ ;\end{array}\right.$$

K représentant la fonction de cosinus qui multiplie $PP'P''$.

Effectuons aussi le produit des équations (D), il viendra

$$BB'B''=\left\{\begin{array}{l}\int P^3\text{Cos.}^2\alpha\ \text{Cos}\ \beta.\text{Cos.}\gamma\ ,\\+\int P^2P'(\text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}\beta.\text{Cos.}\gamma.\text{Cos.}\beta'.\text{Cos.}\gamma'+\text{Cos.}^2\beta.\text{Cos.}\gamma.\text{Cos.}\alpha.\text{Cos.}\gamma'.\text{Cos.}\alpha'+\text{Cos.}^2\gamma.\text{Cos.}\alpha.\text{Cos.}\beta.\text{Cos.}\alpha'.\text{Cos.}\beta')\\+K'PP'P''.\end{array}\right.$$

K' étant le coefficient de $PP'P''$.

Les équations (C) et (D) donnent encore

$$AB^2=\left\{\begin{array}{l}\int P^3\text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}^2\beta.\text{Cos.}^2\gamma\ ,\\+\int P^2P'(\text{Cos.}^2\beta.\text{Cos.}^2\gamma.\text{Cos.}^2\alpha'+2\text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}\beta.\text{Cos.}\gamma.\text{Cos.}\beta'\text{Cos.}\gamma')\\+K''PP'P''\ ;\end{array}\right.$$

$$A'B'^2=\begin{cases}\int P^3\text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}^2\beta.\text{Cos.}^2\gamma\ ,\\ +\int P^2P'(\text{Cos.}^2\gamma.\text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}^2\beta'^2+2\text{Cos.}^2\beta.\text{Cos.}\gamma.\text{Cos.}\alpha.\text{Cos.}\gamma'.\text{Cos.}\alpha')\\ +K'''PP'P''\ ;\end{cases}$$

$$A''B''^2=\begin{cases}\int P^3\text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}^2\beta.\text{Cos.}^2\gamma\ ,\\ +\int P^2P'(\text{Cos.}^2\alpha.\text{Cos.}^2\beta.\text{Cos.}^2\gamma'+2\text{Cos.}^2\gamma.\text{Cos.}\alpha.\text{Cos.}\beta.\text{Cos.}\alpha'.\text{Cos.}\beta')\\ +K''''PP'P''\ .\end{cases}$$

Avec un peu d'attention, on conclura facilement de ces trois dernières équations et des deux précédentes.

$$AA'A''+2BB'B''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2=F.PP'P''. \quad \text{(E)}$$

Pour obtenir la valeur de F, j'observe qu'étant simplememt une fonction de cosinus, sa valeur est indépendante de celles que l'on peut attribuer aux coefficiens A, A', A'', B, B', B''; ainsi posons

$$A=1\ ,\quad A'=1\ ,\quad A''=1\ ,\quad B=0\ ,\quad B'=0\ ,\quad B''=0\ ,$$

Les équations (C), (D), deviennent les équations (B), lorsque $P=1$, $P'=1$, $P''=1$; donc l'équation (E) sera vraie, dans la même hypothèse, et comme elle se réduit à $F=1$, on en conclut que

$$PP'P''=AA'A''+2BB'B''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2\ ;$$

partant l'équation du troisième degré qui a pour racines P, P', P'', sera

$$t^3-(A+A'+A'')t^2+(A'A''+A''A+AA'-B^2-B'^2-B''^2)t+AB^2+A'B'^2+A''B''^2-2BB'B''-AA'A''=0.$$

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

Application aux équations du premier degré de la méthode d'élimination par la recherche d'un commun diviseur entre les équations données.

Par M. G. M. Raymond, principal du collége de Chambéri, membre de plusieurs sociétés savantes et littéraires.

A MM. LES RÉDACTEURS DES *ANNALES*.

Messieurs,

Voici encore un article très-élémentaire que je soumets à votre indulgence et à celle de vos lecteurs. Peut-être les détails les plus minutieux ne sont-ils pas toujours inutiles aux intérets de l'enseignement. Le grand Newton n'a pas dédaigné de descendre jusqu'à la soustraction et à l'addition, pour y introduire la lumière de son génie, et, après lui, les Lagrange et les Laplace se sont arrêtés, avec complaisance, sur les opérations les plus simples du calcul pour en développer la métaphysique. Qu'il me soit donc permis, MM., pendant que les savans auteurs et collaborateurs des *Annales* rassemblent d'importans matériaux autour de l'édifice de la science, pour son accroissement et sa perfection, d'apporter quelquefois mon grain de sable dans la masse commune.

1. Les méthodes d'élimination entre plusieurs équations simultanées ont, en général, pour objet de réduire deux quelconques de ces équa-

tions à une seule. Pour obtenir ce résultat, dans les équations du premier degré, on indique ordinairement trois méthodes qui consistent ou à prendre la valeur d'une inconnue dans l'une des équations pour la substituer dans l'autre, ou à égaler entre elles les valeurs d'une même inconnue tirées des deux équations, ou enfin à modifier les équations par voie de multiplication, de manière qu'en les ajoutant l'une à l'autre, l'inconnue qu'il s'agit d'éliminer disparaisse d'elle-même. On aurait pu facilement remarquer que ces trois méthodes qui, au surplus, ne sont que la même présentée sous différens aspects, reviennent au fonds à la recherche d'un commun diviseur entre les équations données; diviseur composé de l'une des inconnues et subordonné aux valeurs des autres inconnues déterminées convenablement à la question. En cherchant ce commun diviseur par la division ordinaire, on emploirait une méthode d'élimination qui aurait le double avantage d'être souvent plus courte que les procédés rappelés ci-dessus, et d'être uniforme et applicable à tous les degrés : on préparerait ainsi, à l'avance, la théorie de l'élimination appliquée aux équations supérieures.

2. Soit le système des deux équations simultanées

$$\left.\begin{array}{l} ax+by-c=0\,, \\ a'x+b'y-c'=0\,. \end{array}\right\} \quad (A)$$

Puisque la valeur de x doit être la même dans ces deux équations, ainsi que la valeur de y, il est évident que, si l'on y remplace y par sa valeur effective, les deux équations devront contenir une valeur commune de x exprimée par un facteur de la forme

$$x-\alpha=0.$$

Et, comme nous supposons que les équations (A) diffèrent essentiellement, elles deviendront alors de la forme

$$a(x-\alpha)=0\,, \qquad a'(x-\alpha)=0.$$

D'où l'on voit que le commun diviseur $x-\alpha$ se trouverait par la di-

vision, en supprimant dans le diviseur le facteur a ou a', comme ne pouvant faire partie du commun diviseur cherché.

3. Si l'on a un nombre n d'équations simultanées ; que, dans ces équations, a, a', a'',.... désignent les coefficients respectifs de x ; b, b', b'',.... ceux de y ; c, c', c'',.... ceux de z ; et ainsi de suite ; et qu'en même tems α, β, γ,.... désignent respectivement les valeurs simultanées de x, y, z,.... qui conviennent à la question ; il est facile de prouver qu'ayant remplacé $n-1$ inconnues par leurs valeurs respectives, les équations données se trouveront réduites à l'une des classes de formes suivantes :

$$\begin{array}{llll} a\,(x-\alpha)=0\,, & b\,(y-\beta)=0\,, & c\,(z-\gamma)=0\,, & \ldots\ldots\ldots \\ a'(x-\alpha)=0\,, & b'(y-\beta)=0\,, & c'(z-\gamma)=0\,, & \ldots\ldots\ldots \\ a''(x-\alpha)=0\,, & b''(y-\beta)=0\,, & c''(z-\gamma)=0\,, & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\,, & \ldots\ldots\ldots\ldots\,, & \ldots\ldots\ldots\ldots\,, & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

elles acquerront donc un commun diviseur qui, égalé à zéro, donnera la valeur de la n.ième inconnue.

4. La découverte du diviseur commun $x-\alpha$, entre deux équations à deux inconnues, est donc subordonnée à la connaissance et à la substitution de la valeur de y convenable à la question ; or on trouvera cette valeur en ordonnant d'abord les équations données par rapport à x, en divisant le premier membre de l'une par le premier membre de l'autre, et en égalant à zéro le reste indépendant de x : car l'anéantissement du reste donne au diviseur employé la qualité de *commun diviseur* en tant que l'on remplit la condition qui résulte de l'anéantissement de ce reste fonction de y, c'est-à-dire, en tant que l'on donne à y, dans les polynomes dividende et diviseur, la valeur qui résulte de cet anéantissement.

Je sais bien que je ne fais que reproduire ici le raisonnement exposé dans tous les traités élémentaires d'algèbre, à l'article de l'élimination appliquée aux équations des degrés supérieurs ; mais il me semble qu'employer d'abord ce raisonnement pour les équations du premier degré, c'est le mettre à sa première place naturelle, en lui donnant une application facile à saisir, qui comme je l'ai déjà remarqué, a l'avantage

l'avantage de coordonner toute la théorie de l'élimination sur un plan unique et régulier.

5. Divisons donc la seconde des équations (A) par la première, dans la vue de déterminer leur plus grand commun diviseur; la division étant faite et le reste égalé à zéro, on aura

$$(ab'-ba')y+ca'-ac'=0\,, \quad \text{(R)}$$

d'où

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Si l'on substitue cette valeur de y dans les deux équations proposées, elles deviendront, toutes réductions faites,

$$a\left\{x-\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}\right\}=0\,, \qquad a'\left\{x-\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}\right\}=0\,; \quad \text{(B)}$$

ce qui met à découvert le diviseur commun en x qui résulte de la valeur qu'a pris y, dans l'anéantissement du reste de la division; et le diviseur commun, égalé à zéro, donne la valeur de x qui convient à la question.

Soient ces équations numériques

$$3x-2y-4=0\,, \qquad 5x+3y-51=0.$$

Divisant le premier membre de la seconde par le premier membre de la première, au moyen de l'introduction du facteur 3 dans le dividende, on trouvera le reste $19y-133$ qui, étant égalé à zéro, donnera

$$y=\tfrac{133}{19}=7.$$

Cette valeur de y, mise dans les deux équations proposées, les réduit à celles-ci

$$3(x-6)=0\,, \qquad 5(x-6)=0\,,$$

qui ont pour commun diviseur le facteur $x-6$, exprimant la valeur de x commune aux deux équations.

Il est inutile d'observer que, dans la pratique, il suffit de substi-

tuer la valeur de y dans l'une des équations proposées, pour en tirer la valeur correspondante de x (*).

6. Si les équations proposées n'avaient pas de dernier terme, auquel cas on sait que les inconnues sont nécessairement nulles ou indéterminées, le reste (R) égalé à zéro, se réduirait à

$$(ab'-ba')y=0\ ;$$

condition qui ne peut être satisfaite que de deux manières, savoir : 1.° par la nullité du coefficient de y, ce qui rentre dans le cas exposé plus bas (10) et donne $y=\frac{0}{0}$; 2.° par la valeur $y=0$, d'où résulte aussi $x=0$.

7. Soit maintenant le système des trois équations

$$\left.\begin{aligned} a\,x+b\,y+c\,z-d\,&=0\,,\\ a'x+b'y+c'z-d'&=0\,,\\ a''x+b''y+c''z-d''&=0\,.\end{aligned}\right\}\ (C)$$

Divisant successivement le premier membre de chacune des deux dernières par le premier membre de la première, et égalant les restes à zéro, on aura

$$(ab'-ba')y+(ac'-ca')z+da'-ad'=0\ ,\ (R')$$
$$(ab''-ba'')y+(ac''-ca'')z+da''-ad''=0\ .\ (R'')$$

Divisant ensuite le premier membre de l'équation (R'') par le premier membre de l'équation (R'), et égalant à zéro le nouveau reste, on aura

(*) On peut objecter que la méthode de soustraction ne diffère en aucune manière de celle que j'indique, soit dans la modification préalable des deux équations données, soit dans l'usage du reste employé à déterminer l'inconnue qu'on n'a pas éliminée. Cela est vrai, et je l'ai déjà observé plus haut (1). Mais je réponds que le raisonnement diffère complètement dans les deux procédés ; que celui de la soustraction, employée comme telle, ne se présente que comme un simple artifice de calcul ; qu'il n'éclaire pas l'esprit et ne répand aucun jour sur la détermination simultanée et réciproque des deux inconnues ; qu'enfin il exclut toute application aux équations des degrés supérieurs.

$$\{(ab'-ba')(ac''-ca'')-(ac'-ca')(ab''-ba'')\}z+(ab'-ba')(da''-ad'')-(ab''-ba'')(da'-ad')=0.$$

Développant, réduisant, simplifiant et dégageant z, on trouvera enfin

$$z=\frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

Ces opérations, dont la longueur provient de l'emploi des lettres, deviennent très-expéditives sur les nombres, à cause des réductions qui s'exécutent immédiatement. Au surplus les autres méthodes, appliquées à des équations littérales, comportent exactement les mêmes détails de calcul; mais, quand bien même celle-ci n'aurait pas toujours l'avantage de la brièveté, on ne saurait, du moins, lui contester celui de la généralité.

8. En divisant, comme nous l'avons fait, les deux dernières équations (C) du N.° précédent par la première, on conçoit que les conditions (R') (R'') font acquérir aux premiers membres de ces trois équations un commun diviseur, fonction de x, que l'on mettrait en évidence en substituant dans les équations (C) les valeurs de x et y données par les équations (R'), (R''), comme nous l'avons vu pour le cas de deux inconnues.

Donnons maintenant un exemple numérique, et soient pour cela les trois équations

$$2x-3y+2z-3=0,$$
$$5x+2y-2z-8=0,$$
$$3x+7y-5z-7=0.$$

En divisant le premier membre de chacune des deux dernières par le premier membre de la première, et égalant les restes à zéro, il vient d'abord

$$19y-14z-1=0, \quad (r')$$
$$23y-16z-5=0. \quad (r'')$$

Divisant ensuite (r'') par (r'), et égalant encore le reste à zéro, on a

$$18z-72=0\,, \quad \text{d'où } z=4;$$

substituant la valeur de z dans (r') ou (r''), on trouve

$$y=3;$$

substituant enfin les valeurs de y et de z dans les équations proposées, elles deviennent

$$2(x-2)=0\ ,$$
$$5(x-2)=0\ ,$$
$$3(x-2)=0\ ;$$

d'où l'on voit que la valeur de x se présente sous la forme du commun diviseur $x-2$ (*).

9. Si les équations proposées n'avaient pas de dernier terme, les restes (R') et (R'') se réduiraient à

$$(ab'-ba')y+(ac'-ca')z=0\ ,$$
$$(ab''-ba'')y+(ac''-ca'')z=0\ ;$$

équations qui, appartenant au cas indiqué (6), font voir sur-le-champ qu'on aurait $y=0$, $z=0$, d'où $x=0$; à moins cependant que les restes ci-dessus ne fussent nuls d'eux-mêmes, par la nullité des coefficiens de y et de z, ce qui donnerait des valeurs indéterminées pour les inconnues.

10. Si quelques-unes des équations proposées rentraient les unes dans les autres, le caractère indéterminé de la question se manifesterait par la nullité absolue du reste de la division. Soient, par exemple les équations

$$ax+by-c=0\ , \qquad m(ax+by-c)=0.$$

(*) Si les équations proposées appartenaient respectivement à trois plans, la condition (r') exprimerait la projection, sur le plan des yz, de l'intersection du premier et du second plan; la condition (r'') la projection, sur le même plan, de l'intersection du premier et du troisième; enfin l'élimination de y, entre (r') et (r''), la projection, sur l'axe des z, de l'intersection de ces deux droites; ou, ce qui revient au même, la projection, sur l'axe des z, de l'intersection des trois plans, laquelle aurait ainsi, pour ses équations $z=4$, $y=3$, $x=2$.

La division de la seconde par la première donne le quotient exact m, et en égalant le reste à zéro, comme s'il n'était pas nécessairement nul, on obtient l'équation

$$(mb-mb)y+mc-mc=0\ ,$$

d'où l'on tire, pour y toutes ces formes de valeurs

$$y=\frac{c(m-m)}{m(b-b)}\ ,\ y=\frac{m(c-c)}{b(m-m)}\ ,\ y=\frac{m(c-c)}{m(b-b)}\ ,\ y=\frac{c(m-m)}{b(m-m)}\ .$$

Les trois premières se réduisent nécessairement à

$$y=\frac{0}{0}\ ;$$

quant à la dernière elle devient, par la suppression du facteur commun,

$$y=\frac{c}{b}\ ;$$

cette valeur, substituée dans l'équation

$$ax+by-c=0\ ,$$

donne

$$ax=0\ ;$$

ce qui exige que l'on ait $x=0$, si toutefois a n'est pas nul. Ces résultats sont exacts, puisque la nullité de l'une des inconnues détermine nécessairement l'autre, en sorte qu'alors l'équation proposée n'en renferme proprement qu'une seule.

11. Si l'on avait trois équations, l'indétermination pourrait d'abord dépendre de ce que deux d'entre elles ne différeraient que par un multiplicateur commun à tous les termes de l'une d'elles, et cette circonstance se manifesterait, comme dans l'exemple précédent, par la nullité absolue du reste de la division de ces deux équations l'une par l'autre, ou par l'équivalence des équations en y et z qu'on obtiendrait en égalant à zéro les restes de leurs divisions par la troisième.

Si, en second lieu, l'indétermination résultait de ce que l'une des équations serait la somme des produits des deux autres, chacune par un certain facteur, cette circonstance se manifesterait encore par

l'équivalence des équations en y et z qu'on obtiendrait en égalant à zéro les quotiens de la division de deux quelconques d'entre elles par la troisième.

Si enfin le problème était plus qu'indéterminé, c'est-à-dire, si les trois équations prises deux à deux ne différaient que par un multiplicateur commun à tous les termes de l'une d'elles, dans ce cas le reste de la division serait identiquement nul, quelles que fussent les deux équations sur lesquelles on l'opérerait.

12. Si la division de deux des équations du problème l'une par l'autre donnait pour reste une quantité toute connue, l'impossibilité d'égaler ce reste à zéro, annoncerait qu'il ne peut exister de commun diviseur entre ces équations qui par conséquent ne sauraient avoir lieu en même temps; le problème serait donc alors impossible.

Soient par exemple les deux équations évidemment incompatibles

$$ax+by-c=0\ , \qquad max+mby-nc=0\ ;$$

en égalant à zéro le reste de la division de la seconde par la première, on aura :

$$(m-n)c=0\ ,$$

condition absurde, tant que m est différent de n, et c différent de zéro.

Si l'on écrivait le reste, sans y opérer de réductions, on aurait

$$(m-m)by+(m-n)c=0\ , \quad \text{d'où} \quad y=-\frac{(m-n)c}{0}\ ;$$

symbole de l'infini, qui peut seul lever l'absurdité exprimée par le système des deux équations proposées (*).

(*) L'impossibilité des problèmes à plus de deux inconnues présente plusieurs cas qu'il peut être utile de faire remarquer aux commençans.

Supposons que l'on ait seulement trois équations entre trois inconnues; il pourra d'abord arriver que, de quelque manière qu'on prenne ces équations deux à deux, elles soient également incompatibles; ce qui revient, en géométrie, à chercher le point commun à trois plans parallèles.

Il peut ensuite arriver que, l'une d'elles pouvant avoir lieu avec chacune des deux autres, prises séparément, ces dernières soient incompatibles entre elles, ce qui

Il résulte des considérations précédentes que la méthode d'élimination par la recherche du commun diviseur, fait reconnaître toutes les circonstances et tous les cas particuliers que peut présenter un problème du premier degré (*).

---

revient, en géométrie, à chercher le point commun à trois plans dont deux sont parallèles.

Il peut arriver aussi que deux des équations proposées soient équivalentes, et alors, si la troisième est incompatible avec l'une d'elles, elle le sera aussi avec l'autre; ainsi, dans ce cas, le problème sera indéterminé dans un sens, et impossible dans l'autre. Ce cas répond, en géométrie, à la recherche du point commun à trois plans dont deux se confondent et dont le troisième leur est parallèle.

Il peut enfin arriver que, de quelque manière que l'on prenne les trois équations deux à deux, elles ne soient pas incompatibles, et que néanmoins le problème soit impossible, à raison de la contradiction qui existera entre les deux équations qui résulteront de l'élimination d'une même inconnue entre elles. C'est, en géométrie, le cas de la recherche du point commun à trois plans qui, sans être parallèles entre eux, sont parallèles à une même droite, et se coupent conséquemment deux à deux suivant trois droites parallèles.

(*) On ne saurait contester à M. *Raymond* l'utilité, on pourrait presque dire la nécessité, de commencer par le premier degré l'application des procédés généraux d'élimination; mais ce serait une erreur de croire qu'il faille se borner, pour ce degré, à ces procédés généraux qui ont principalement pour objet d'éluder la résolution des équations par rapport aux inconnues qu'il s'agit de faire disparaître, ce qui n'est en effet d'aucun avantage lorsque les équations sont du premier degré. La méthode du commun diviseur en particulier n'a pu naître que de réflexions qui supposent déjà une certaine habitude de l'analise, tandis que, pour le premier degré, l'élimination, soit par les substitutions soit par l'expression de l'égalité entre diverses valeurs d'une même inconnue, se présente, pour ainsi dire, d'elle-même à l'esprit.

La méthode d'élimination par les multiplicateurs indéterminés ne doit pas non plus être négligée, d'autant qu'elle a pour analogue, dans les degrés supérieurs, celle qui a été présentée par *Bezout* dans sa *Théorie des équations algébriques*; mais, pour lui donner toute l'élégance et la simplicité dont elle peut être susceptible, il convient d'employer autant de multiplicateurs que d'équations; ce qui permet de n'admettre, pour ces multiplicateurs, que des valeurs entières, et montre ainsi, dès les premiers pas dans l'analise, l'avantage qu'il peut y avoir à introduire dans une question plus d'indéterminées que sa nature ne semble l'exiger.

Soient d'abord les deux équations

$$ax+by+c=0\ ,\qquad a'x+b'y+c'=0\ ;$$

La méthode d'*Euler*, fondée également sur la considération d'un commun diviseur, peut aussi s'appliquer au premier degré; nous n'en donnerons qu'un seul exemple.

---

la somme de leurs produits par les indéterminées m et m' sera

$$(ma+m'a')x+(mb+m'b')y+(mc+m'c')=0.$$

si l'on veut que y disparaisse, il faudra poser

$$mb+m'b'=0 \qquad \text{d'où} \qquad m'=-\frac{mb}{b'};$$

posant donc, pour plus de simplicité $m=\pm b'$, on aura $m'=\mp b$; ainsi, on fera disparaître y de ces équations, en prenant la somme de leurs produits par $\pm b'$ et $\mp b$; on trouverait de même que, pour en faire disparaître x, il faut prendre la somme de leurs produits par $\pm a'$ et $\mp a$, on obtient ainsi

$$x=-\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}, \qquad y=-\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Soient ensuite les trois équations

$$\begin{aligned} a\,x+b\,y+c\,z+d\,&=0, \\ a'x+b'y+c'z+d'&=0, \\ a''x+b''y+c''z+d''&=0; \end{aligned}$$

la somme de leurs produits respectifs par m, m', m'', sera

$$(ma+m'a'+m''a'')x+(mb+m'b'+m''b'')y+(mc+m'c'+m''c'')z+(md+m'd'+m''d'')=0.$$

Si l'on veut que y et z disparaissent, il faudra poser

$$mb+m'b'+m''b''=0, \qquad mc+m'c'+m''c''=0,$$

d'où on tirera, par ce qui a été dit ci-dessus,

$$m'=-\frac{b\,c''-c\,b''}{b'c''-c'b''}m, \qquad m''=-\frac{c\,b'-b\,c'}{b'c''-c'b''}m;$$

posant donc, pour plus de simplicité, $m=\pm(b'c''-c'b'')$, il viendra $m'=\pm(cb''-bc'')$, $m''=\pm(bc'-cb')$. Ainsi, on fera disparaître, à la fois, y et z de ces trois équations, en prenant la somme de leurs produits respectifs par

$$\pm(b'c''-c'b''), \qquad \pm(b''c-c''b), \qquad \pm(bc'-cb').$$

On en ferait disparaître x et z, en prenant la somme de leurs produits par

$$\pm(c'a''-a'c''), \qquad \pm(c''a-a''c), \qquad \pm(ca'-ac');$$

et on les délivrerait enfin de x et y, en prenant la somme de leurs produits par

$$\pm(a'b''-b'a''), \qquad \pm(a''b-b''a), \qquad \pm(ab'-ba').$$

Il est facile d'étendre ces considérations à un plus grand nombre d'équations renfermant un égal nombre d'inconnues.

(*Note des éditeurs.*)

Soient

Soient les deux équations

$$ax+by-c=0\,, \qquad a'x+b'y-c'=0.$$

On posera

$$ax+by-c=p(x-\alpha)\,, \qquad a'x+b'y-c'=p'(x-\alpha)$$

d'où, par l'élimination de $x-\alpha$, on conclura l'identité

$$ap'x+(bp'y-cp')-a'px-(b'py-c'p)=0\;;$$

laquelle fournira les deux équations

$$ap'=a'p\,, \qquad p'(by-c)=p(b'y-c')\,,$$

qui sont suffisantes pour éliminer p et p'; et qui, par l'élimination de ces quantités, conduiront à l'équation finale en y.

Il serait facile d'étendre ces diverses considérations à un plus grand nombre d'inconnues; mais c'est déjà occuper trop long-temps ici une place que nous devons céder à des théories plus importantes.

J'ai l'honneur d'être, etc.

GÉOMÉTRIE.

Recherche de la plus grande des projections ortographiques d'un système de figures planes, données de grandeur sur des plans donnés de position dans l'espace, et de la plus grande des projections ortographiques d'un triangle sphérique;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

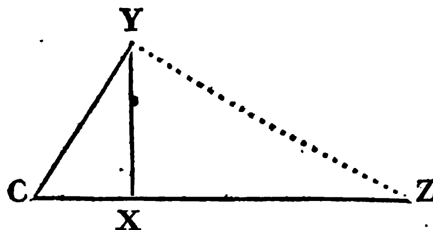


La doctrine des projections ortographiques est de la plus grande importance, soit dans les mathématiques pures, soit dans les mathématiques mixtes. Elle sert de base aux propositions les plus générales de la polygonométrie et de la polyhédrométrie. Elle trouve des ap-

plications fréquentes et importantes dans l'optique, dans la perspective, dans la géographie, dans la gnomonique et sur-tout dans l'astronomie. Tout ce qui peut contribuer à étendre ou à éclairer cette doctrine est d'une utilité ou immédiate ou indirecte. L'objet de ce mémoire est intéressant et remarquable, soit par la réduction d'une question générale de *maximum* aux simples élémens, soit par l'accord de ses résultats avec les propriétés générales des polyhèdres (*).

§. 1.

Lemme. Soient deux droites dont on connaît seulement la somme des quarrés : on demande la plus grande valeur de la somme de leurs rectangles par des droites données de grandeur. Ou, soit un triangle rectangle dont l'hypothénuse seulement est donnée de grandeur, on demande la plus grande valeur de la somme des rectangles de ses côtés par des droites données de grandeur.



Soit XCY un triangle rectangle dont on connaît l'hypothénuse CY. Soient m et n deux droites données de grandeur. On demande la plus grande valeur de la somme $m\times XY+n\times CX$?

(*) Nous saisirons cette occasion pour exprimer le vœu qu'à l'exemple de M. *Francœur*, ceux qui écrivent des élémens de géometrie y introduisent l'importante notion des *projections*, que par-tout on suppose connue et qui n'est pour ainsi dire présentée nulle part ; cette notion, entre autres avantages, serait très-propre à abréger, et conséquemment à rendre plus clairs les énoncés d'un grand nombre de théorèmes. On dirait, par exemple : *les quarrés des cordes qui, dans un demi-cercle, partent des extrémités du diamètre sont proportionnels à leurs projections sur ce diamètre. L'inclinaison d'une droite sur un plan, se mesure par l'angle que fait cette droite avec sa projection sur ce plan.* etc., etc.

(*Note des éditeurs.*)

Que la somme $m\times XY+n\times CX$ soit égale au rectangle de la droite n par une droite CZ dont on doit déterminer le *maximum*. On obtient $m\times XY=n\times XZ$; donc $XY:XZ=n:m$. Dans le triangle XYZ, le rapport des côtés XY et XZ se trouvant ainsi connu, ce triangle est donné d'espèce ; et, en particulier, l'angle en Z est connu, et la droite ZY est parallèle à une droite donnée de position. De là, la plus grande valeur de CZ a lieu lorsque la droite ZY est tangente au cercle dont C est le centre et dont CY est le rayon. Dans le cas du *maximum*, $ZX:XY=XY:CX=m:n$; savoir, les droites XY et CX sont entre elles directement comme les droites m et n qui leur correspondent.

Puisque $XY:CX=m:n$, on a $CY^2:\begin{cases}XY^2\\CX^2\end{cases}=mm+nn:\begin{cases}mm\\n\,n\end{cases}$; d'où

$$XY=CY\times\frac{m}{\sqrt{mm+nn}};\ CX=CY\times\frac{n}{\sqrt{mm+nn}};\ CZ=CY\times\frac{\sqrt{mm+nn}}{n};$$

$$\text{et } n\times CZ=CY\times\sqrt{mm+nn}.$$

Remarque. Ce résultat d'un procédé purement élémentaire, s'accorde avec celui du calcul différentiel.

En effet, soient

$$\left.\begin{array}{l}xx+yy=aa\\ \\ mx+ny=maxim.\end{array}\right\}\text{ on aura }\left\{\begin{array}{l}x+y\dfrac{dy}{dx}=0\\ \\ m+n\dfrac{dy}{dx}=0\end{array}\right\}\text{ d'où } x:y=m:n$$

En général, soient deux quantités variables dont la somme des quarrés est donnée. La somme de leurs produits par des quantités données est la plus grande, lorsque ces premières quantités sont entre elles comme les dernières quantités qui leur correspondent (*).

(*) Ce théorème peut encore être démontré d'une manière assez simple et assez élégante en procédant comme il suit :

Soit proposé de déterminer deux inconnues x et y au moyen des deux équations

$$x^2+y^2=r^2\ ,\qquad mx+ny=K\ ;$$

la première pourra être considérée comme appartenant à un cercle ayant son centre

Application. Soient des quantités variables en nombre quelconque dont la somme des quarrés est donnée : j'affirme que la somme de leurs produits par des quantités données est la plus grande, lorsque ces variables sont entre elles comme les quantités données qui leur correspondent.

En effet, toutes les variables excepté deux quelconques d'entre elles restant les mêmes, ces dernières doivent être entre elles comme les quantités données qui leur correspondent. Donc toutes les variables doivent être entre elles comme les quantités données qui leur correspondent.

à l'origine des coordonnées rectangulaires et son rayon égal à r, tandis que la seconde sera celle d'une droite. Ainsi les valeurs de x et de y qui résoudront le problème seront les coordonnées des points d'intersection de ces deux lignes, de manière que, généralement parlant, le problème aura deux solutions ; mais, comme la distance du centre du cercle à la droite a pour expression

$$\frac{K}{\sqrt{m^2+n^2}},$$

le problème ne sera possible qu'autant que cette quantité ne sera pas plus grande que r.

Si maintenant on suppose K indéterminé et qu'on demande quelles valeurs il faut donner à x et y pour qu'il soit le plus grand possible, comme K est proportionnel à

$$\frac{K}{\sqrt{m^2+n^2}},$$

la question reviendra à rendre cette dernière quantité la plus grande possible ; il faudra donc poser

$$\frac{K}{\sqrt{m^2+n^2}}=r, \qquad \text{d'où} \qquad K=r\sqrt{m^2+n^2},$$

on aura donc

$$mx+ny=r\sqrt{m^2+n^2}, \qquad \text{ou} \qquad (mx+ny)^2=r^2(m^2+n^2);$$

éliminant donc r^2 entre cette équation et celle du cercle, il viendra, en développant, transposant, réduisant et extrayant la racine quarrée, $my-nx=0$, ou $\frac{x}{y}=\frac{m}{n}$, comme dans le texte.

(*Note des éditeurs.*)

§. 2.

Problème. Soient des figures planes données de grandeur, sur des plans donnés de position (non parallèles entre eux). On demande le plan sur lequel on doit les projeter ortographiquement pour que la somme de leurs projections soit la plus grande possible.

Comme les projections sur une même plan de deux figures planes de même grandeur, situées sur des plans parallèles, sont égales entre elles; on peut, pour plus de simplicité, rapporter les figures proposées à des plans qui se coupent en un même point; et en particulier on peut prendre ce point pour l'origine des coordonnées.

Soient F, F', F'', ... $F^{(n-1)}$, $F^{(n)}$, les figures données de grandeur.

Que les équations des plans sur lesquels ces figures sont rapportées, et que nous avons supposé passer par l'origine des coordonnées, soient

$$x\text{Cos.}\alpha+y\text{Cos.}\beta+z\text{Cos.}\gamma=0\,,$$
$$x\text{Cos.}\alpha'+y\text{Cos.}\beta'+z\text{Cos.}\gamma'=0\,,$$
$$x\text{Cos.}\alpha''+y\text{Cos.}\beta''+z\text{Cos.}\gamma''=0\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,$$
$$x\text{Cos.}\alpha^{(n-1)}+y\text{Cos.}\beta^{(n-1)}+z\text{Cos.}\gamma^{(n-1)}=0\,,$$
$$x\text{Cos.}\alpha^{(n)}+y\text{Cos.}\beta^{(n)}+z\text{Cos.}\gamma^{(n)}=0\,.$$

Que l'équation du plan sur lequel on projette des figures, et que nous supposons aussi passer par l'origine, soit

$$x\text{Cos.}X+y\text{Cos.}Y+z\text{Cos.}Z=0.$$

Les cosinus des inclinaisons de ces premiers plans sur le dernier seront respectivement

$$\text{Cos.}\alpha\,.\,\text{Cos.X}+\text{Cos.}\beta\,.\,\text{Cos.Y}+\text{Cos}\,\gamma\,.\,\text{Cos.Z}\,,$$
$$\text{Cos.}\alpha'.\text{Cos.X}+\text{Cos.}\beta'.\text{Cos.Y}+\text{Cos.}\gamma'.\text{Cos.Z}\,,$$
$$\text{Cos.}\alpha''.\text{Cos.X}+\text{Cos.}\beta''.\text{Cos.Y}+\text{Cos.}\gamma''.\text{Cos.Z}\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,$$

$$\text{Cos.}\alpha^{(n-1)}\text{Cos.X}+\text{Cos.}\beta^{(n-1)}\text{Cos.Y}+\text{Cos.}\gamma^{(n-1)}\text{Cos.Z},$$

$$\text{Cos.}\alpha^{(n)}\ \text{Cos.X}+\text{Cos.}\beta^{(n)}\ \text{Cos.Y}+\text{Cos.}\gamma^{(n)}\ \text{Cos.Z}.$$

La somme des projections des figures proposées sur ce dernier plan sera donc

$$\{\text{FCos.}\alpha+\text{F}'\text{Cos.}\alpha'+\text{F}''\text{Cos.}\alpha''+\ldots\ldots+\text{F}^{(n-1)}\text{Cos.}\alpha^{(n-1)}+\text{F}^{(n)}\text{Cos.}\alpha^{(n)}\}\,\text{Cos.X}$$

$$+\{\text{FCos.}\beta+\text{F}'\text{Cos.}\beta'+\text{F}''\text{Cos.}\beta''+\ldots\ldots+\text{F}^{(n-1)}\text{Cos.}\beta^{(n-1)}+\text{F}^{(n)}\text{Cos.}\beta^{(n)}\}\,\text{Cos.Y},$$

$$+\{\text{FCos.}\gamma+\text{F}'\text{Cos.}\gamma'+\text{F}''\text{Cos.}\gamma''+\ldots\ldots+\text{F}^{(n-1)}\text{Cos.}\gamma^{(n-1)}+\text{F}^{(n)}\text{Cos.}\gamma^{(n)}\}\,\text{Cos.Z}.$$

Or, la somme $\text{Cos.}^2\text{X}+\text{Cos.}^2\text{Y}+\text{Cos.}^2\text{Z}=1$, est une quantité constante ; donc la somme des projections des figures proposées est la plus grande, lorsque les quantités variables Cos.X, Cos.Y, Cos.Z, sont entre elles respectivement comme leurs coefficiens.

Or, les coefficiens de Cos.X, Cos.Y, Cos.Z, sont respectivement les sommes des projections des figures proposées sur les trois plans coordonnés. Pour abréger, que ces sommes soient désignées par $\int\text{F.Cos.}\alpha$, $\int\text{F.Cos.}\beta$, $\int\text{F.Cos.}\gamma$; les quantités inconnues Cos.X, Cos.Y, Cos.Z, sont entre elles respectivement comme les quantités connues $\int\text{F.Cos.}\alpha$, $\int\text{F.Cos.}\beta$, $\int\text{F.Cos.}\gamma$. De là on obtient

$$\text{Cos.X}=\frac{\int\text{F.Cos.}\alpha}{\sqrt{\int^2\text{F.Cos.}\alpha+\int^2\text{F.Cos.}\beta+\int^2\text{F.Cos.}\gamma}},$$

$$\text{Cos.Y}=\frac{\int\text{F.Cos.}\beta}{\sqrt{\int^2\text{F.Cos.}\alpha+\int^2\text{F.Cos.}\beta+\int^2\text{F.Cos.}\gamma}},$$

$$\text{Cos.Z}=\frac{\int\text{F.Cos.}\gamma}{\sqrt{\int^2\text{F.Cos.}\alpha+\int^2\text{F.Cos.}\beta+\int^2\text{F.Cos.}\gamma}}.$$

La plus grande somme de projections cherchée est

$$\text{Cos.X.}\int\text{F.Cos.}\alpha+\text{Cos.Y.}\int\text{F.Cos.}\beta+\text{Cos.Z.}\int\text{F.Cos.}\gamma\ ;$$

$$=\frac{\int^2\text{F.Cos.}\alpha+\int^2\text{F.Cos.}\beta+\int^2\text{F.Cos.}\gamma}{\sqrt{\int^2\text{F.Cos.}\alpha+\int^2\text{F.Cos.}\beta+\int^2\text{F.Cos.}\gamma}},$$

$$=\sqrt{\int^2\text{F.Cos.}\alpha+\int^2\text{F.Cos.}\beta+\int^2\text{F.Cos.}\gamma}.$$

Savoir : *le quarré de la plus grande somme de projections des*

figures proposées est égal à la somme des quarrés des sommes des projections de ces figures sur les trois plans coordonnés.

§. 3

Dans un tétraèdre trirectangle, le quarré de l'hypothénuse (la face opposée à l'angle solide droit) est égal à la somme des quarrés des autres faces. Donc, si l'on réduit la somme des projections des figures proposées sur chacun des plans coordonnés en un triangle rectangle ayant pour sommet l'origine des coordonnées (*), le plan de la plus grande projection est celui de l'hypothénuse de ce tétraèdre ; et la plus grande projection cherchée est cette hypothénuse elle-même (**).

Remarque. Lorsque, dans un tétraèdre trirectangle, les trois faces de l'angle droit sont données de grandeur, chacune de ces faces est aussi donnée d'espèce. La plus grande projection cherchée, ou l'hypothénuse de ce tétraèdre est la somme des projections de ses faces sur cette hypothénuse ; et partant, cette plus grande projection est la projection des sommes des projections des figures données sur les trois plans coordonnés.

(*) Il faut, en outre, que les deux côtés de l'angle droit de chacun de ces triangles soient respectivement égaux aux côtés des deux autres qui se trouvent situés sur les mêmes axes.

(**) Ce plan est très-facile à déterminer : soient, en effet, A, B, C, les segmens qu'il détermine sur les axes, à partir de l'origine, son équation sera

$$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1,$$

on aura d'ailleurs

$$BC=2\int F.\mathrm{Cos}.\alpha, \qquad CA=2\int F.\mathrm{Cos}.\beta, \qquad AB=2\int F.\mathrm{Cos}.\gamma,$$

d'où

$$A=\sqrt{\frac{2\int F.\mathrm{Cos}.\beta\times\int F.\mathrm{Cos}.\gamma}{\int F.\mathrm{Cos}.\alpha}},\quad B=\sqrt{\frac{2\int F.\mathrm{Cos}.\gamma\times\int F.\mathrm{Cos}.\alpha}{\int F.\mathrm{Cos}.\beta}},\quad C=\sqrt{\frac{2\int F.\mathrm{Cos}.\alpha\times\int F.\mathrm{Cos}.\beta}{\int F.\mathrm{Cos}.\gamma}};$$

substituant ces valeurs dans l'équation du plan cherché, elle deviendra, toutes réductions faites,

$$x\int F.\mathrm{Cos}.\alpha+y\int F.\mathrm{Cos}.\beta+z\int F.\mathrm{Cos}.\gamma=\sqrt{2\int F.\mathrm{Cos}.\alpha\times\int F.\mathrm{Cos}.\beta\times\int F.\mathrm{Cos}.\gamma}.$$

(*Notes des éditeurs.*)

§. 4.

On peut aussi exprimer la plus grande projection cherchée dans les figures données et dans les inclinaisons de leurs plans, deux à deux. Qu'on développe, en effet, l'expression

$$\int.^2F.\text{Cos}.\alpha+\int.^2F.\text{Cos}.\beta+\int.^2F.\text{Cos}.\gamma.$$

Le coefficient du quarré de l'une des faces, telle que F est $\text{Cos.}^2\alpha+\text{Cos.}^2\beta+\text{Cos.}^2\gamma=1$; partant, ce développement comprend la somme des quarrés de toutes les figures données. Le coefficient du produit de deux faces, telles que F et F', est $2(\text{Cos.}\alpha\text{Cos}\alpha'+\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\beta'+\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\gamma')$, et partant le double du cosinus de l'inclinaison entre elles des perpendiculaires à ces deux faces, ou le double du cosinus du supplément de l'inclinaison de ces deux faces. Partant, le quarré de la plus grande projection cherchée est l'excès de la somme des quarrés des figures proposées sur le double de la somme de leurs produits, deux à deux, par les cosinus de leurs inclinaisons (prises intérieurement à la figure formée par les plans sur lesquels elles sont tracées).

§. 5.

Le résultat que je viens d'obtenir présente une analogie remarquable entre le sujet de ce mémoire et les propositions les plus générales de la polyhédrométrie. En effet, dans tout polyhèdre, le quarré de l'une des faces est égal à l'excès de la somme des quarrés des autres faces sur le double de la somme de leurs produits, deux à deux, par les cosinus de leurs inclinaisons (*). Partant, si l'on

(*) Cette belle proposition est développée par CARNOT, dans son ouvrage ingénieux intitulé : *Géométrie de position*. J'en avais envoyé le développement à l'Institut avant la publication de ce bel ouvrage. (Voyez les *Mémoires présentés à l'Institut*, et la note de cet auteur, P. 306). Il a été bien flatteur pour moi de me trouver d'accord avec ce grand géomètre, soit pour l'objet de mes recherches, soit pour la marche qui m'a conduit aux résultats obtenus.

(*Note de l'auteur.*)

conçoit

conçoit un polyhèdre dont toutes les faces (excepté une) soient respectivement égales et parallèles aux figures données de grandeur, la face restante (si le polyhèdre est possible) est, soit quant à la grandeur, soit quant à la position, la plus grande projection des figures proposées.

En effet, une face quelconque d'un polyhèdre est égale à la somme des produits de toutes les autres par les cosinus de leurs inclinaisons sur elle; ou elle est la somme des projections sur son plan de toutes les faces restantes; et la somme des projections de toutes les faces, excepté l'une d'elles, sur un plan quelconque, est égale à la projection de la face restante sur le même plan. Or cette dernière face est plus grande qu'aucune de ses projections faites sur un plan qui ne lui est pas parallèle; partant la plus grande somme de projections de toutes les faces d'un polyhèdre, excepté une, est cette face restante.

Cette proposition est évidente, lorsque les premières faces font, avec la face restante (que j'appelle *base*), des angles aigus, pris intérieurement au polyhèdre. Lorsque quelqu'un de ces angles est obtus, l'expression *somme* se change en *différence*, en changeant les signes des cosinus qui répondent à des angles obtus.

La possibilité du polyhèdre proposé peut être éclaircie comme il suit. J'ai démontré (voyez mes *Élémens d'analise géométrique*, *etc*, pag. 25-28) la proposition suivante: D'un point pris dans l'intérieur d'un polyhèdre soient abaissées, sur ses faces, des perpendiculaires; sur ces perpendiculaires soient prises, depuis ce point, des droites respectivement proportionnelles à ces faces, ce point est le centre des moyennes distances des extrémités de ces droites.

L'application de ce théorème au sujet de ce mémoire est évidente. D'un point P soient abaissées, sur les plans donnés de position, des perpendiculaires; sur ces perpendiculaires soient prises, depuis le point P, des droites respectivement proportionnelles aux figures données de grandeur (en tournant toujours dans un même sens). Si le point P se trouve être le centre des moyennes distances des extrémités

de ces droites, la somme des projections des figures proposées sur un plan quelconque est zéro ; et partant la position du plan est indéterminée. Que le point P ne soit pas le centre des moyennes distances des points donnés ; soit déterminé le point P′, tel que le point P soit le centre des moyennes distances des points donnés et du point P′ ; la distance du point P au point P′ est proportionnelle à la plus grande somme de projections des figures proposées ; et tout plan perpendiculaire à la droite PP′ est l'un des plans parallèles entre eux sur lesquels a lieu cette plus grande projection.

§. 6.

Ce que j'ai dit sur les projections des figures planes peut s'appliquer aux projections de quelques surfaces courbes, et, en particulier, il s'applique aisément aux projections des triangles et des polygones sphériques.

Soit un triangle sphérique, et qu'on demande le plan sur lequel on doit projeter ce triangle orthographiquement pour que la projection soit la plus grande possible.

Soit conçue la pyramide sphérique ayant pour base le triangle sphérique proposé, et ayant pour sommet le centre de la sphère à laquelle ce triangle appartient. La projection du triangle sphérique sur un plan quelconque est égale à la somme des projections des faces latérales de cette pyramide sur le même plan. Partant, la projection du triangle sphérique est la plus grande, lorsque la somme des projections des faces de la pyramide est la plus grande. Soient F, F', F'', les faces de cette pyramide, et que leurs inclinaisons, deux à deux (prises intérieurement au solide) soient désignées par ff', $f'f''$, $f''f$; la plus grande projection du triangle sphérique est

$$\sqrt{F^2+F'^2+F''^2-2F'F''.\text{Cos}.f'f''-2F''F.\text{Cos}.f''f-2FF'.\text{Cos}.ff'}.$$

La position du plan de plus grande projection se détermine comme il suit. Que les faces latérales de la pyramide sphérique soient conçues converties en triangles ayant le même sommet et les mêmes côtés adjacens, de manière que les triangles rectilignes égaux à ces faces

deviennent les faces latérales d'une pyramide triangulaire. Le plan de la base de cette pyramide est le plan cherché de la plus grande projection du triangle sphérique proposé.

On ramène, de même, la projection d'un polygone sphérique, à la projection des faces (planes) d'une pyramide sphérique ; et partant, on détermine la position et la grandeur de la plus grande projection de ce polygone.

Remarque. La projection d'un polygone sphérique est composée d'espaces elliptiques, appartenant à des ellipses différentes dont l'espèce dépend des inclinaisons des faces de la pyramide sphérique sur le plan de projection ; et, malgré cette complication, la grandeur de la plus grande projection est facilement déterminée.

Post-Scriptum. Je me suis entretenu de l'objet de ce mémoire avec mon ami et collègue, M. le professeur SCHAUB : il m'a averti que M. POISSON avait traité le même sujet. En effet, dans le N.° 10 (avril 1808) de la *Correspondance sur l'école polytechnique*, se trouve un mémoire de ce profond mathématicien dont une partie est relative à l'objet principal de celui-ci. Il m'a été fort agréable de me rencontrer, dans le sujet d'une recherche, avec un savant aussi distingué. Cependant, je n'ai pas cru devoir supprimer mon travail. Nous avons suivi, pour parvenir au même but, des marches sensiblement différentes. Le rapprochement que je fais, des propriétés obtenues et des propositions fondamentales de la polyhédrométrie, me parait, en particulier, mériter l'attention des mathématiciens.

GÉOMÉTRIE.

Note sur le problème de l'inscription de trois cercles à un triangle, traité à la page 343 du premier volume des Annales ;

Par LES RÉDACTEURS DES *ANNALES*.

PLUSIEURS géomètres, n'ayant pas sous la main les derniers volumes des *Mémoires de la société italienne*, ont manifesté le désir de connaître, par la voie des *Annales*, l'analise qui a conduit M. *Malfatti* à l'élégante construction à laquelle il est parvenu, pour l'inscription de trois cercles à un triangle. Les rédacteurs, dans la vue de répondre à leur vœu, se sont adressés à M. *Bidone* qui a bien voulu leur faire parvenir un extrait de la solution de M. *Malfatti*. Malheureusement cette solution est peu propre à éclairer sur les moyens par lesquels l'auteur l'a obtenue ; elle se réduit uniquement, en effet, à former les équations du problème et les valeurs des inconnues, et à prouver ensuite, à l'aide des relations entre les données, que les dernières satisfont aux premières. M. *Bidone* termine ainsi son extrait :

« Tel est le précis de la solution de M. *Malfatti*, qu'il dit avoir » converti en un théorème, comme on le voit par ses procédés, pour » la présenter sous une forme plus simple, et pour ne pas être obligé » d'exposer le nombre de calculs qu'il a sans doute dû faire pour » arriver à cette construction, en cherchant à résoudre directement le » problème. M. *Malfatti* n'indique nullement la trace qu'il a suivie

» pour parvenir aux valeurs des inconnues, et l'on peut dire que son » mémoire est tout renfermé dans ce précis, à quelques développe- » mens près ».

Au lieu de vérifier les valeurs des inconnues sur les équations de M. *Malfatti*, les rédacteurs des *Annales* préfèrent les vérifier sur les leurs qui sont plus simples, attendu que M. *Malfatti* emploie six inconnues au lieu de trois, et qu'en outre, n'ayant pas représenté par des symboles particuliers les distances des sommets du triangle donné au centre du cercle qui lui est inscrit, ses formules se trouvent ainsi compliquées de radicaux.

Avant de venir au but, il faut d'abord établir entre les données du problème des équations de rélation propres à simplifier le calcul. On a (tom. 1.er pag. 343)

$$c+c'+c''=2s\ ,$$

$$s-c'=\rho'\ ,$$

$$s-c''=\rho''\ ;$$

en ajoutant ces équations et réduisant, il vient

$$c=\rho'+\rho''\ ;$$

d'où

$$c^2 \quad \text{ou} \quad c(s-\rho)=\rho'^2+2\rho'\rho''+\rho''^2\ ,$$

ou, en multipliant par ρ et mettant pour $\rho\rho'\rho''$ sa valeur R^2s,

$$\rho sc=2R^2s+c\rho^2+\rho\rho'^2+\rho\rho''^2\ ;$$

en mettant pour s, dans le second membre sa valeur $c+\rho$ il vient

$$\rho sc=2R^2c+2R^2\rho+c\rho^2+\rho\rho'^2+\rho\rho''^2\ ;$$

mais on a

$$\rho^2=d^2-R^2\ , \qquad \rho'^2=d'^2-R^2\ , \qquad \rho''^2=d''^2-R^2\ ;$$

substituant donc, il viendra, en réduisant

$$\rho sc=cR^2+cd^2+\rho d'^2+\rho d''^2 \;;$$

ajoutant à cette dernière équation, l'équation

$$0=2Rcd-2\rho d'd'' \;,$$

l'équation résultante pourra être mise sous cette forme

$$\rho sc=c(R+d)^2+\rho(d'-d'')^2 \;;$$

en y mettant pour c sa valenr $s-\rho$, elle deviendra

$$\rho\{s^2+(R+d)^2-(d'-d'')^2\}=s\{(R+d)^2+\rho^2\} \;;$$

ajoutant à cette équation, l'équation identique

$$-2\rho s(R+d)=-2s\rho(R+d) \;,$$

l'équation résultante pourra être mise sous cette forme

$$\rho\{(s-R-d)^2-(d'-d'')^2\}=s(R+d-\rho)^2 \;;$$

et comme, dans toutes ces formules, on peut, à volonté, permuter les accens, on aura

$$(A)\qquad \rho\,\{(s-R-d\,)^2-(d'-d'')^2\}=s(R+d-\rho\,)^2 \;,$$

$$(A')\qquad \rho'\{(s-R-d'\,)^2-(d''-d\,)^2\}=s(R+d'-\rho'\,)^2 \;,$$

$$(A'')\qquad \rho''\{(s-R-d'')^2-(d-d'\,)^2\}=s(R+d''-\rho'')^2 \;.$$

Cela posé, on a vu (tom. 1.er, pag. 344) que les équations du problème sont

$$(B)\qquad \rho'r'+2R\sqrt{r'r''}+\rho''r''=Rc \;,$$

$$(B')\qquad \rho''r''+2R\sqrt{r''r}+\rho\,r=Rc' \;,$$

$$(B'')\qquad \rho\,r+2R\sqrt{r\,r'}+\rho'r'=Rc'' \;;$$

et il sagit de prouver qu'on y satisfait, en posant

$$(C) \qquad 2\rho r = R(s-R+d-d'-d'') \,,$$

$$(C') \qquad 2\rho' r' = R(s-R+d'-d''-d) \,,$$

$$(C'') \qquad 2\rho'' r'' = R(s-R+d''-d-d') \text{ (*)}.$$

Pour cela soient d'abord ajoutées, deux à deux, les équations (C, C', C'',) il viendra, en divisant par 2,

$$(D) \qquad \rho' r' + \rho'' r'' = R(s-R-d) \,,$$

$$(D') \qquad \rho'' r'' + \rho r = R(s-R-d') \,,$$

$$(D'') \qquad \rho r + \rho' r' = R(s-R-d'') \,;$$

multipliant les mêmes équations deux à deux, il viendra

$$(E) \qquad 4\rho'\rho'' r' r'' = R^2\{(s-R-d)^2-(d'-d'')^2\} \,,$$

$$(E') \qquad 4\rho''\rho\, r'' r = R^2\{(s-R-d')^2-(d''-d)^2\} \,,$$

$$(E'') \qquad 4\rho\rho' r r' = R^2\{(s-R-d'')^2-(d-d')^2\} \,;$$

multipliant respectivement ces dernières équations par ρ, ρ', ρ'', et changeant $\rho\rho'\rho''$ en $R^2 s$, il vient

$$(F) \qquad 4R^2 s r' r'' = R^2\rho\{(s-R-d)^2-(d'-d'')^2\} \,,$$

$$(F') \qquad 4R^2 s r'' r = R^2\rho'\{(s-R-d')^2-(d''-d)^2\} \,,$$

$$(F'') \qquad 4R^2 s r r' = R^2\rho''\{(s-R-d'')^2-(d-d')^2\} \,.$$

Par leur comparaison avec les équations (A, A', A''), et la division par s, ces équations deviennent

$$(G) \qquad 4R^2 r' r'' = R^2(R+d-\rho)^2 \,,$$

$$(G') \qquad 4R^2 r'' r = R^2(R+d'-\rho')^2 \,,$$

$$(G'') \qquad 4R^2 r r' = R^2(R+d''-\rho'')^2 \,;$$

d'où, par l'extraction de la racine quarrée, on déduit celles-ci

---

(*) Voyez tome 1.er, page 348.

$$(H)\qquad 2R\sqrt{r'r''}=R(R+d-\rho)\,,$$
$$(H')\qquad 2R\sqrt{r''r}=R(R+d'-\rho')\,,$$
$$(H'')\qquad 2R\sqrt{rr'}=R(R+d''-\rho'')\,,$$

lesquelles ajoutées respectivement aux équations (D, D', D''), donnent

$$\rho'r'+2R\sqrt{r'r''}+\rho''r''=R(s-\rho)=Rc\,,$$
$$\rho''r''+2R\sqrt{r''r}+\rho r=R(s-\rho')=Rc'\,,$$
$$\rho r+2R\sqrt{rr'}+\rho'r'=R(s-\rho'')=Rc''\,;$$

qui sont précisément les équations du problème.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. TROIS figures planes étant données de grandeur seulement sur trois plans, non parallèles deux à deux, donnés de position; déterminer un quatrième plan sur lequel ces figures étant projetées orthogonalement, les aires de leurs projections soient proportionnelles à des nombres donnés ?

II. Soient divisés, dans le même sens, tous les côtés d'un polygone P donné, de m côtés, en deux parties qui soient entre elles dans le rapport de p à q. Si l'on joint les points de division consécutifs par des droites, ces droites formeront un nouveau polygone P′, aussi de m côtés. Opérant sur celui-ci comme sur le premier, on obtiendra un nouveau polygone P″ duquel on pourra déduire un quatrième polygone P‴ et ainsi de suite.

Les côtés de ces polygones décroissant continuellement, si l'on poursuit l'opération à l'infini, le dernier polygone se réduira nécessairement à un point. On demande de déterminer la situation de ce point relativement au polygone primitif P ?

INTRODUCTION

INTRODUCTION

A la Philosophie des Mathématiques ;

Par M. HOËNÉ DE WRONSKI, ci-devant officier supérieur d'artillerie au service de la Russie (*).

ANNONCE ;

Par LES RÉDACTEURS DES *ANNALES*.

L'ABONDANCE des matériaux qui nous sont parvenus pour la composition des *Annales*, ne nous a pas permis jusqu'ici, et ne paraît guère devoir nous permettre davantage, pour l'avenir, d'y présenter à nos lecteurs, ainsi que nous nous l'étions promis, l'analise des ouvrages nouveaux relatifs aux sciences exactes ; mais, loin que nous croyons devoir nous justifier de cette sorte d'omission, nous pensons, au contraire, que le motif qui la nécessite ne peut que la faire tourner à l'avantage du recueil. En effet, outre que plusieurs écrits périodiques suppléent, à cet égard, à ce qui manque à celui-ci, des analises d'ouvrages nouveaux, quelque soin qu'on y mette d'ailleurs, n'ont au fond qu'un intérêt éphémère, et demeurent à peu près sans objet, dès qu'une fois ces ouvrages sont répandus, ou lorsque, frappés par l'opinion, ils sont tombés dans l'oubli ; à quoi l'on peut ajouter que, le plus souvent, la réputation acquise des auteurs fixe, à l'avance, d'une manière à peu près certaine, le degré de confiance et d'estime que doivent mériter leurs pro-

(*) Volume in-4.° de près de 300 pages ; à Paris, chez *Courcier*, libraire pour les mathématiques, quai des Augustins, n.° 57.

ductions. En composant, au contraire, notre recueil de mémoires inédits, sur les diverses branches des mathématiques, nous en formons un corps d'ouvrage d'un intérêt durable, et qui pourra être utilement consulté dans tous les temps.

Il est néanmoins certains écrits qui semblent réclamer de nous une exception : ce sont ceux qui, par la nouveauté des vues qu'ils présentent, tendent à produire quelque révolution dans les sciences exactes ; et telle est, en particulier, l'*Introduction à la philosophie des mathématiques*, par M. DE WRONSKI : aussi, avant même que l'ouvrage eût paru, avions-nous déjà conçu le dessein d'en présenter l'analise dans ce recueil ; mais un coup d'œil jeté rapidement sur cette production vraiment originale, tout en nous montrant l'utilité, nous pourrions presque dire l'indispensable nécessité du travail que nous avions projeté, nous a presque ôté le courage de l'entreprendre.

Nous ne sommes point, en effet, initiés dans la doctrine du *Transcendantalisme*; nous en ignorons jusqu'aux premiers élémens, et la langue même qu'il lui a plu de se créer nous est tout à fait étrangère. Cependant, une connaissance parfaite de cette nouvelle scolastique, semble être une condition presque indispensable pour bien saisir les idées de M. *de Wronski*. On peut en juger par le début de son livre qui, bien qu'il n'en soit pas l'endroit le moins intelligible, paraîtra sans doute aussi obscur à la plupart de nos lecteurs, qu'il nous l'a paru à nous-mêmes ; le voici :

« Le monde physique présente, dans la causalité non intelligente, » dans la nature, deux objets distincts : l'un, qui est la *forme*, la manière d'être ; l'autre qui est le *contenu*, l'essence même de l'action » physique.

» La déduction de cette dualité de la nature, appartient à la philosophie : nous nous contenterons ici d'en indiquer l'origine transcendantale. — Elle consiste dans la dualité des lois de notre savoir, et nommément dans la diversité qui se trouve entre les lois transcendantales » de la sensibilité (de la réceptivité de notre savoir), et les lois transcendantales de l'entendement (de la spontanéité ou de l'activité de

» notre savoir). C'est, en effet, dans la diversité qui résulte de l'ap-
» plication de ces lois aux phénomènes donnés à postériori, que con-
» siste la dualité de l'aspect sous lequel se présente la nature ; dua-
» lité que nous rangeons, conduits de nouveau par des lois trans-
» cendantales, sous les conceptions de *forme* et de *contenu* du monde
» physique ».

Ce n'est certainement pas dans ce style que *Leibnitz* et *Euler* ont traité des sujets de philosophie ; mais, si le style de M. *de Wronski* est obscur, son livre n'est pas cependant du nombre de ceux qu'il soit permis de négliger. On ne saurait, en effet, contester à l'Auteur d'être très-versé dans toutes les branches des sciences exactes ; de connaître parfaitement tout ce qu'on en a écrit ; et d'avoir lui-même, sur la philosophie de ces sciences, des vues non moins profondes et non moins générales qu'elles sont nouvelles.

Nous ferons donc tous nos efforts pour tenter de *traduire en français*, pour notre usage, l'INTRODUCTION A LA PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES, et nous destinerons ensuite plusieurs articles des *Annales* à en faire connaître la substance ; si toutefois, dans la tâche pénible que nous allons entreprendre, nous obtenons quelques succès.

Cet ouvrage n'étant pas, au surplus, le seul que M. *de Wronski* se propose de publier, nous croyons convenable de placer ici quelques réflexions que, pour l'intérêt même de sa gloire, nous désirons vivement que l'auteur veuille bien prendre en considération.

M. *de Wronski*, dans l'une des notes de son livre, observe que l'application que *Condillac* et *Limmer* ont voulu faire aux sciences mathématiques, l'un, du système de sensualisme de *Locke*, et l'autre, du système d'intellectualisme de *Leibnitz*, a été d'une nullité absolue pour le progrès de ces sciences, et cette remarque nous paraît d'une exactitude parfaite ; mais nous pensons qu'elle doit être indistinctement étendue à tous les systèmes philosophiques qu'il a plu ou qu'il pourra plaire encore à l'esprit humain d'imaginer. Nos opinions spéculatives, en effet, n'ont guère plus d'influence sur notre entendement que sur notre volonté, sur notre savoir que sur notre conduite ; et, quoi qu'en

veuille prétendre la modestie de M. *de Wronski*, s'il a fait des découvertes dans les sciences exactes, s'il en a reculé les limites, c'est à son génie et à son rare savoir qu'il en est redevable, bien plus qu'aux dogmes métaphysiques qu'il a adoptés.

Nous osons dire plus encore, et nous pensons que, si M. *de Wronski* eût uniquement dirigé l'activité de son esprit vers ces mêmes sciences, que s'il fût né et qu'il eût vécu jusqu'ici en France, il serait déjà, très-problablement, en possession d'une réputation qu'il travaille seulement à acquérir; nous pensons qu'alors, donnant à ses idées un plus libre essor, il ne lui serait pas échappé quelques erreurs évidentes, quelques divisions et distinctions également forcées et inutiles, que sa raison désavoue peut-être à son insçu, et qui ne se sont glissées dans son livre que sous l'influence despotique des principes de la scolastique du Nord: nous pensons qu'alors enfin son ouvrage, à la fois plus clair et plus concis, n'eût pas été déparé par un néologisme fatigant et par une métaphysique ardue qui, nous le répétons, ne saurait aucunement contribuer à l'avancement des sciences positives.

Sans donc prétendre que M. *de Wronski* doive abandonner des systèmes philosophiques auxquels il paraît sincèrement et fortement attaché, nous pensons que, pour son intérêt et celui du public, il ferait bien de rendre à l'avenir moins dépendans de ces mêmes systèmes les ouvrages qu'il se propose de nous donner encore. S'il veut, en effet, que ces ouvrages soient lus et appréciés par notre nation: et il le veut sans doute, puisque c'est au milieu de nous qu'il les publie; il faut qu'il apprenne d'abord à bien nous connaître; il faut qu'il sache bien que nous n'estimons vrai que ce qui peut être clairement exprimé en langue vulgaire; que nous n'aimons pas d'acheter l'instruction par trop de peine; que nous voulons que les idées même les plus abstraites soient revêtues de formes agréables; qu'enfin, nous sommes une nation un peu légère chez laquelle le livre le plus profondément pensé ne se sauve pas du discrédit, s'il exige, pour être compris, une contention d'esprit dont notre caractère et nos habitudes nous rendent également incapables.

ANALISE.

Formule nouvelle pour calculer les logarithmes ;

Par M. Dubourguet, professeur de mathématiques spéciales au lycée impérial.



On sait qu'en représentant par l la caractéristique des logarithmes naturels, on a généralement

$$\mathrm{l}x=\frac{(x-1)}{1}-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots \quad \text{(A).}$$

Cette série, qui ne peut converger lorsque $x>2$, a cependant été mise par Lagrange sous une forme très-convergente, en substituant à x la quantité $\sqrt[n]{x}$; ce qui a donné à ce grand géomètre l'équation

$$\mathrm{l}x=n\left\{\frac{(\sqrt[n]{x}-1)}{1}-\frac{(\sqrt[n]{x}-1)^2}{2}+\frac{(\sqrt[n]{x}-1)^3}{3}-\ldots\right\} \quad \text{(B)}$$

dont le second membre converge rapidement lorsqu'on prend n assez grand pour que $\sqrt[n]{x}$ n'excède l'unité que d'une très-petite fraction ; mais la longueur du calcul qu'exige l'extraction de la racine n de x, lors même qu'on prend n égale à une puissance exacte de 2, afin de n'avoir que des extractions de racines quarrées à effectuer, a fait rejeter cette formule, lorsqu'on a voulu calculer des tables de logarithmes.

Si l'on substitue successivement $1+y$ et $1-y$ à la place de x dans l'équation (A), qu'ensuite on retranche la seconde équation trouvée

de la première ; en posant $\frac{1+y}{1-y}=x$, d'où $y=\frac{x-1}{x+1}$, on obtiendra la formule déjà connue

$$lx=2\left\{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\ldots\ldots\right\}, \quad (C)$$

qui est convergente et assez simple.

Voilà les seules formules de ce genre, du moins à ma connaissance, qui ont été trouvées jusqu'à présent. Mais mes recherches sur cet objet m'ont conduit à la formule suivante

$$lx=\frac{x-1}{x}\left\{\frac{x+1}{2}-\left[\frac{1}{1.3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+\frac{1}{3.5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4+\frac{1}{5.7}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^6+\ldots\right]\right\} \quad (D)$$

qui est beaucoup plus convergente que la formule (C), et qui se démontre comme je vais l'expliquer (*).

On sait qu'en prenant l'intégrale de la formule $dz\sqrt{1+z^2}$, de manière que cette intégrale s'évanouisse lorsque $z=0$, on a complètement

$$\int dz\sqrt{1+z^2}=\frac{1}{2}\left\{z\sqrt{1+z^2}+l(z+\sqrt{1+z^2})\right\},$$

(*) Si, dans les formules (C), (D), on fait $x=\frac{u}{t}$, elles deviendront

$$lu=lt+2\left\{\left(\frac{u-t}{u+t}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{u-t}{u+t}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{u-t}{u+t}\right)^5+\ldots\ldots\right\} \quad (C')$$

$$lu=lt+\frac{u-t}{ut}\left\{\frac{u+t}{2t}-\left[\frac{1}{1.3}\left(\frac{u-t}{u+t}\right)^2+\frac{1}{3.5}\left(\frac{u-t}{u+t}\right)^4+\frac{1}{5.7}\left(\frac{u-t}{u+t}\right)^6+\ldots\right]\right\} \quad (D')$$

formules qui convergeront rapidement, si l'on prend pour t et u deux nombres très-grands et très-peu différens, et qui seront susceptibles de toutes les applications qui ont été détaillées dans ce recueil (tom. 1, pag. 79 et suivantes). Mais, ce qui rend sur-tout précieux le concours de ces deux formules, c'est que, la première étant toujours fautive par défaut et la seconde par excès, leur emploi simultané peut seul faire connaître la limite de l'erreur que peut donner l'usage de l'une ou de l'autre.

(*Note des éditeurs.*)

d'où l'on tire

$$l(z+\sqrt{1+z^2})=2\int dz\sqrt{1+z^2}-z\sqrt{1+z^2}. \qquad (E)$$

Mais, en se servant de la méthode d'intégration par approximation que j'ai donnée au chapitre IV de la première section de mon calcul intégral (art. 257 et 258) (*), et que je crois nouvelle, on a

$$\int dz\sqrt{1+z^2}=z\sqrt{1+z^2}-\frac{z^3}{\sqrt{1+z^2}}\left\{\frac{1}{3}+\frac{z^2}{3.5(1+z^2)}+\frac{z^4}{5.7(1+z^2)^2}+\ldots\right\}, \quad (F)$$

en prenant, comme précédemment, l'intégrale de manière qu'elle s'évanouisse lorsque $z=0$.

Substituant cette valeur de $\int dz\sqrt{1+z^2}$ dans l'équation (E), on a

$$l(z+\sqrt{1+z^2})=z\sqrt{1+z^2}-\frac{2z^3}{\sqrt{1+z^2}}\left\{\frac{1}{3}+\frac{z^2}{3.5(1+z^2)}+\frac{z^4}{5.7(1+z^2)^2}+\ldots\right\}. (G)$$

Soit fait $\sqrt{x}=z+\sqrt{1+z^2}$, d'où $z=\frac{x-1}{2\sqrt{x}}$,

$$\sqrt{1+z^2}=\sqrt{x}-z=\frac{x+1}{2\sqrt{x}}, \quad z\sqrt{1+z^2}=\frac{x^2-1}{4x},$$

$$\frac{2z^3}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{(x-1)^3}{2x(x+1)}, \quad \frac{z^2}{1+z^2}=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (G), en observant que $l\sqrt{x}=\frac{1}{2}lx$, et multipliant toute l'équation par 2, on obtiendra la formule (D) qu'il s'agissait de démontrer.

Si, après avoir divisé les deux membres de l'équation (D) par $\frac{x-1}{x}$, on y suppose $x=0$, elle deviendra en transposant

(*) Cet ouvrage se trouve à Paris, chez l'Auteur, rue St-Jacques, n.° 121, et chez Courcier, quai des augustins, n.° 57.

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+\frac{1}{9.11}+\ldots,$$

résultat assez remarquable (*).

GÉOMÉTRIE.

Détermination du centre des moyennes distances d'un triangle sphérique.

Par M. LHUILIER, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.



§. I.

Le centre des moyennes distances d'un triangle rectiligne est le point de section des droites menées de chacun de ses sommets aux milieux des côtés opposés, ou ce centre est sur chacune des parallèles aux côtés du triangle dont les distances à ces côtés sont moitié de leurs distances aux sommets des angles opposés.

Cette propriété du centre des moyennes distances d'un triangle rectiligne découle de cette autre propriété du même triangle : la droite menée de l'un des sommets d'un triangle rectiligne au milieu du

(*) On s'assure *à priori* de l'exactitude de ce résultat, en remarquant que la somme générale des termes de la série dont il s'agit est $\frac{n}{2n+1}$ ou $\frac{1}{2+\frac{1}{n}}$ dont la limite est $\frac{1}{2}$.

(*Note des éditeurs.*)

côté opposé coupe en deux parties égales chacune des droites parallèles à ce côté terminées aux côtés adjacens à ce sommet.

Cette dernière proposition n'a pas sa correspondante dans les triangles sphériques. Aussi la détermination du centre des moyennes distances d'un triangle sphérique n'est-elle pas susceptible du même degré de simplicité que la recherche analogue relative au triangle rectiligne. J'ai fait des efforts inutiles pour la ramener aux simples élémens. Parmi les divers procédés qu'on peut suivre pour parvenir à cette détermination, le suivant m'a paru le moins compliqué ; et, en particulier, il me paraît plus simple que celui qui serait fondé sur la doctrine générale des coordonnées.

§. 2.

Lemme. Soit $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{a+b\,\mathrm{Sin}.x+c\,\mathrm{Cos}.x}$ une équation différentielle proposée. Dans la double supposition que z et x doivent devenir nuls en même temps, et que $a^2>b^2+c^2$, on a

$$z=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\,\mathrm{Arc}\left\{\mathrm{Tang.}=\frac{\sqrt{a^2-b^2-c^2}.\mathrm{Tang.}\frac{1}{2}x}{a+c+b\,\mathrm{Tang.}\frac{1}{2}x}\right\}.$$

Cette intégrale se vérifie facilement par la différentiation ; mais, comme le moyen de l'obtenir ne se trouve indiqué dans aucun des ouvrages qui sont à ma disposition, et en particulier dans celui d'Euler, je crois devoir indiquer ici la route par laquelle j'y suis parvenu, et considérer, en même temps, les différens cas qu'elle peut présenter.

Soit donc

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{a+b\,\mathrm{Sin}.x+c\,\mathrm{Cos}.x}\,;$$

soit fait $\mathrm{Sin}.x=\frac{2y}{1+y^2}$, d'où $\mathrm{Cos}.x=\frac{1-y^2}{1+y^2}$, et partant $y=\mathrm{Tang}.\frac{1}{2}x$.

De là

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=\frac{2}{(a+c)+2by+(a-c)y^2}\,;$$

Première supposition. Soit $c=a$, on aura

$$\frac{dz}{dy}=\frac{2}{(a+c)+2by}=\frac{1}{b}\cdot\frac{2b}{(a+c)+2by}=\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{\left(\frac{a+c}{2b}\right)+y}$$

$$\text{d'où } z=C+\frac{1}{b}\text{Log.}\left\{\frac{a+c}{2b}+\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\,x\right\}.$$

Si, en particulier, on suppose que z et x doivent être nuls en même temps, on aura

$$z=\frac{1}{b}\text{Log.}\left\{1+\frac{2b}{a+c}\,\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\,x\right\}.$$

Seconde supposition. Soit $c>a$, on aura

$$\frac{dz}{dx}=2.\frac{1}{(c+a)+2by-(c-a)y^2}$$

$$=\frac{2}{c-a}\cdot\frac{1}{\frac{c+a}{c-a}+\frac{2b}{c-a}-y^2}$$

$$=\frac{2}{c-a}\cdot\frac{1}{\left\{\frac{c+a}{c-a}+\frac{b^2}{(c-a)^2}\right\}-\left\{\frac{b}{c-a}-y\right\}^2}$$

$$=\frac{2}{c-a}\cdot\frac{1}{\frac{c^2-a^2+b^2}{(c-a)^2}-\left\{\frac{b}{c-a}-y\right\}^2}$$

$$=\frac{2}{c-a}\cdot\frac{1}{\left\{\frac{\sqrt{(c^2-a^2+b^2)}+b}{c-a}-y\right\}\left\{\frac{\sqrt{(c^2-a^2+b^2)}-b}{c-a}+y\right\}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{c^2-a^2+b^2}}\left\{\frac{1}{\frac{\sqrt{c^2-a^2+b^2}}{c-a}-y}+\frac{1}{\frac{\sqrt{c^2-a^2+b^2}}{c-a}+y}\right\}$$

d'où on conclura

$$z=C+\frac{1}{\sqrt{c^2-a^2+b^2}}\left\{\text{Log.}\left[\frac{\sqrt{c^2-a^2+b^2}}{c-a}+y\right]-\text{Log.}\left[\frac{\sqrt{c^2-a^2+b^2}}{c-a}-y\right]\right\}$$

$$=C+\frac{1}{\sqrt{c^2-a^2+b^2}}\,\text{Log.}\frac{\sqrt{c^2-a^2+b^2}+(c-a)y}{\sqrt{c^2-a^2+b^2}-(c-a)y}$$

$$=C+\frac{1}{\sqrt{c^2-a^2+b^2}}\,\text{Log.}\frac{\sqrt{c^2-a^2+b^2}+(c-a)\,\text{Tang.}\,\frac{1}{2}x}{\sqrt{c^2-a^2+b^2}-(c-a)\,\text{Tang.}\,\frac{1}{2}x}.$$

Si l'on veut, en particulier, que z et x soient zéro en même temps, la constante C devra être nulle.

Troisième supposition. Soit enfin $c<a$, on aura

$$\frac{dz}{dy}=\frac{2}{(a+c)+2by+(a-c)y^2}$$

$$=\frac{2}{a-c}\cdot\frac{1}{\frac{a+c}{a-c}+\frac{2b}{a-c}y+y^2}$$

$$=\frac{2}{a-c}\cdot\frac{1}{\left\{\frac{a+c}{a-c}-\frac{b^2}{(a-c)^2}\right\}+\left\{\frac{b}{a-c}+y\right\}^2}$$

$$=\frac{2}{a-c}\cdot\frac{1}{\frac{a^2-b^2-c^2}{(a-c)^2}+\left\{\frac{b}{a-c}+y\right\}^2}$$

$$=2.\frac{a-c}{a^2-b^2-c^2}\cdot\frac{1}{1+\left\{\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}+\frac{a-c}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}y\right\}^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\cdot\frac{\frac{a-c}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}}{1+\left\{\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}+\frac{a-c}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}y\right\}^2},$$

d'où on conclura

$$z=C+\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\cdot\text{Arc}\left\{\text{Tang.}=\frac{b+(a-c)y}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\right\}$$

$$=C+\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\cdot\text{Arc}\left\{\text{Tang.}=\frac{b+(a-c)\text{Tang.}\frac{1}{2}x}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\right\}$$

si, en particulier, on veut que z et x soient zéro en même temps, on aura

$$z=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\cdot\left\{\text{Arc}\left[\text{Tang.}=\frac{b+(a-c)\text{Tang.}\frac{1}{2}x}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\right]-\text{Arc}\left[\text{Tang.}=\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\right]\right\}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\cdot\text{Arc}\left\{\text{Tang.}=\frac{\sqrt{(a^2-b^2-c^2)}\text{Tang.}\frac{1}{2}x}{a+c+b\,\text{Tang.}\frac{1}{2}x}\right\}.$$

§. 3.

Soit une partie de la surface sphérique terminée par deux arcs égaux de grands cercles et par l'arc de petit cercle qui, joignant leurs extrémités, a pour pôle leur point de section. On demande le moment de cette surface relativement au plan tangent mené à la sphère par le point de concours des deux arcs égaux ?

Soit BAB′ (fig. 1) une partie de la surface sphérique terminée par deux arcs de grands cercles AB, AB′, égaux entre eux, et par l'arc de petit cercle BB′ joignant leurs extrémités, et ayant le point A pour pôle. On demande le moment de cette surface relativement au plan tangent mené par A.

Soit mené le rayon AC. Que les arcs AB, AB′ soient divisés en un même nombre de parties égales, et soient menés les arcs de petits cercles qui joignent les points correspondans, et qui ont pour pôle le point A. Que les arcs Mm, Mm', soient deux de ces parties correspondantes. Sur le rayon CA soient abaissées les perpendiculaires MP, mp. Que les arcs AB, AB′ rencontrent, en X, X′, le grand cercle dont A est le pôle. Qu'enfin le rayon de la sphère soit désigné par r ; et soit π la circonférence du cercle dont le diamètre est l'unité, on aura

$$\text{Hémis.}:\text{XAX}'=2\pi:\text{XX}',$$

XAX′

$$XAX' : Mmm'M' = r \quad : Pp\,;$$

donc $\quad$ $\text{Hémis.} : Mmm'M' = 2\pi r^2 : Pp.XX'.$

Mais $\quad$ $\text{Hémis.} = 2\pi r^2\,;$

donc $\quad$ $Mmm'M' = Pp.XX'$

La limite du moment de l'espace $Mmm'M'$, relativement au plan tangent en A est $Pp.XX'.AP$, et partant, le moment de l'espace MAM' est $\frac{1}{2}AP^2.XX' = \frac{1}{2}XX'.4r^2\text{Sin.}^4\frac{1}{2}AM = 2r^2.XX'.\text{Sin.}^4\frac{1}{2}AM$.

Or, l'espace MAM' a pour expression $XX'.AP = 2r.XX'.\text{Sin.}^2\frac{1}{2}AM$; donc la distance du centre des moyennes distances de l'espace MAM' au plan tangent en A, est $\frac{1}{2}AP = r\text{Sin.}^2\frac{1}{2}AM$.

Remarque. Il est facile de ramener aux simples élémens cette proposition particulière.

§. 4.

Soit un triangle sphérique dont un des côtés est constant, et dont un des angles, ayant pour sommet une des extrémités de ce côté, est aussi constant. On demande le moment de ce triangle relativement au plan tangent à la sphère mené par l'autre extrémité de ce côté.

Soit ABB' (fig. 2) un triangle sphérique dont le côté AB est constant, ainsi que l'angle B. On demande le moment de ce triangle relativement au plan tangent à la sphère mené par l'extrémité A de ce côté ?

Soit décomposé le triangle proposé en espaces sphériques MAM' ayant en A leur sommet commun. Que les arcs AM, AM' rencontrent, en X, X', le grand cercle dont A est le pôle. Soit aussi Mm' un arc de petit cercle dont A est le pôle, et terminé en m' à l'arc AM'.

Le moment de l'espace MAm' ou MAM', relativement au plan proposé, est (§. 3.) $2r^2.XX'.\text{Sin.}^4\frac{1}{2}AM = 2r^2.\text{Sin.}^4\frac{1}{2}AM.\frac{Mm'}{\text{Sin.}AM} =$

$$2r^2.\text{Sin.}^4\tfrac{1}{2}\text{AM}.\frac{\text{MM}'.\text{Sin.M}}{\text{Sin.AM}} = 2r^2.\text{Sin.}^4\tfrac{1}{2}\text{AM}.\frac{\text{Sin.AM}.\text{Sin.M}}{\text{Sin.}^2\text{AM}}.\text{MM}' =$$

$$2r^2.\text{Sin.}^4\tfrac{1}{2}\text{AM}.\frac{\text{Sin.B}.\text{Sin.AB}}{\text{Sin.}^2\text{AM}}.\text{MM}'$$

$$= \tfrac{1}{2}r^2.\text{MM}'.\text{Sin.B.Sin.AB.Tang.}^2\tfrac{1}{2}\text{AM}$$

$$= \tfrac{1}{2}r^2.\text{Sin.B}.\text{Sin.AB}.\frac{1-\text{Cos.AM}}{1+\text{Cos.AM}}.\text{MM}',$$

$$= \tfrac{1}{2}r^2.\text{MM}'.\text{Sin.B.Sin.AB}\left\{\frac{2}{1+\text{Cos.AM}} - 1\right\}$$

$$= \frac{r^2.\text{Sin.B.Sin.AB.MM}'}{1+\text{Sin.AB.Sin.BM.Cos.B}+\text{Cos.AB.Cos.BM}} - \tfrac{1}{2}r^2.\text{MM}'\text{Sin.B.Sin.AB};$$

en observant donc que

$$1-\text{Sin.}^2\text{AB}.\text{Cos.}^2\text{B}-\text{Cos.}^2\text{AB} = \text{Sin.}^2\text{AB}.\text{Sin.}^2\text{B},$$

on trouvera pour le moment du triangle ABM (§. 2.)

$$2r^3.\text{Arc}\left\{\text{Tang.} = \frac{\text{Sin.AB.Sin.B.Tang.}\tfrac{1}{2}\text{BM}}{1+\text{Cos.AB}+\text{Cos.B.Sin.AB.Tang.}\tfrac{1}{2}\text{BM}}\right\} - \tfrac{1}{2}r^2\text{Sin.B.Sin.AB.BM}.$$

Le moment du triangle ABB′, relativement au même plan, sera donc

$$2r^3.\text{Arc}\left\{\text{Tang.} = \frac{\text{Sin.AB.Sin.B.Tang.}\tfrac{1}{2}\text{BB}'}{1+\text{Cos.AB}+\text{Cos.B.Sin.AB.Tang.}\tfrac{1}{2}\text{BB}'}\right\} - \tfrac{1}{2}r^2\text{Sin.B.Sin.AB.BB}'.$$

§. 5.

Comme on a Sin.B . Sin.AB = Sin.B′ . Sin.A′B′, tout est symétrique, dans cette expression par rapport aux angles B, B′, et aux côtés opposés AB′, AB, excepté le dénominateur; mais nous allons faire voir que ce dénominateur peut aussi être rendu symétrique, ainsi que cela doit être.

En effet, $\text{Cos.B} = \frac{\text{Cos.AB}'-\text{Cos.AB.Cos.BB}'}{\text{Sin.AB.Sin.BB}'}$;

donc $\text{Cos.B.Sin.AB} = \frac{\text{Cos.AB}'-\text{Cos.AB.Cos.BB}'}{\text{Sin.BB}'} = \frac{\text{Cos.AB}'-\text{Cos.AB.Cos.BB}'}{2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\text{BB}'.\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\text{BB}'}$;

donc aussi, $\text{Cos.B.Sin.AB.Tang.}\tfrac{1}{2}\text{BB}' = \dfrac{\text{Cos.AB}' - \text{Cos.AB.Cos.BB}'}{2\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}\text{BB}'}$,

ou $\text{Cos.B.Sin.AB.Tang.}\tfrac{1}{2}\text{BB}' = \dfrac{\text{Cos.AB}' - \text{Cos.AB.Cos.BB}'}{1 + \text{Cos.BB}'}$;

donc enfin

$$1 + \text{Cos.AB} + \text{Cos.B.Sin.AB.Tang.}\tfrac{1}{2}\text{BB}' = \frac{1 + \text{Cos.AB} + \text{Cos.AB}' + \text{Cos.BB}'}{1 + \text{Cos.BB}'}.$$

§. 6.

Le moment du triangle sphérique ABB′, exprimé d'une manière symétrique dans les côtés AB, AB′, et rapporté au plan tangent en A, est donc

$$2r^3\text{Arc}\left\{\text{Tang.} = \frac{\text{Sin.AB.Sin.B.Sin.BB}'}{1 + \text{Cos.AB} + \text{Cos.AB}' + \text{Cos.BB}'}\right\} - \tfrac{1}{2}r^2\text{BB}'.\text{Sin.AB.Sin.B}.$$

Que le produit continuel des sinus de la demi-somme des trois côtés du triangle sphérique et des sinus des excès de cette demi-somme sur chacun d'eux, soit désigné par P; on aura Sin.B. Sin.AB. Sin.BB′ $= 2\sqrt{P}$; que de plus l'arc BB′ soit exprimé dans le rayon pris pour unité; le moment du triangle BAB′, relativement au plan tangent en A, sera

$$2r^3.\text{Arc}\left\{\text{Tang.} = \frac{2\sqrt{P}}{1 + \text{Cos.AB} + \text{Cos.AB}' + \text{Cos.BB}'}\right\} - r^3\sqrt{P}.\frac{\text{BB}'}{\text{Sin.BB}'}.$$

Soit r^2S la surface du triangle sphérique, rapportée à l'octant pris pour unité de surface; et partant, soit $S = \text{B} + \text{B}' + \text{A} - 2$ droits; on aura

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}S = \frac{2\sqrt{P}}{1 + \text{Cos.AB} + \text{Cos.AB}' + \text{Cos.BB}'}.$$

(Voyez la *Géométrie de* LEGENDRE.)

Donc le moment du triangle, relativement au plan tangent en A, sera

$$2r^3.\tfrac{1}{2}S - r^3\sqrt{P}.\frac{BB'}{\text{Sin.}BB'},$$

$$= r^3S - r^3\sqrt{P}.\frac{BB'}{\text{Sin.}BB'}.$$

§. 7.

Puisque r^2S est la surface du triangle BAB', la distance au plan tangent en A du centre des moyennes distances de ce triangle, est

$$r - r.\frac{\sqrt{P}}{S}.\frac{BB'}{\text{Sin.}BB'}.$$

La distance de ce centre au plan mené par le centre de la sphère perpendiculairement au rayon CA, est donc

$$r.\frac{\sqrt{P}}{S}.\frac{BB'}{\text{Sin.}BB'};$$

ce qui donne la proposition suivante :

THÉORÈME. Du centre des moyennes distances d'un triangle sphérique soient abaissées des perpendiculaires sur les rayons menés à ses sommets. Les segmens de ces rayons retranchés depuis le centre de la sphère, sont entre eux comme les exposans des rapports que les arcs opposés à ces rayons ont à leurs sinus; et le coefficient constant de l'exposant de ce rapport est $r.\frac{\sqrt{P}}{S}$.

Remarque. On a $\sqrt{P} = 2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}S.\text{Cos.}\tfrac{1}{2}AB.\text{Cos.}\tfrac{1}{2}AB'.\text{Cos.}\tfrac{1}{2}BB'$; donc ce coefficient constant est aussi

$$r.\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}S}{\tfrac{1}{2}S}.\text{Cos.}\tfrac{1}{2}AB.\text{Cos.}\tfrac{1}{2}AB'.\text{Cos.}\tfrac{1}{2}BB'.$$

§. 8.

Soit *Z* le centre des moyennes distances du triangle sphérique BAB' (fig. 3), et soient Za, Zb, Zb', les perpendiculaires abaissées du

point Z sur les rayons CA, CB, CB'; les droites C*a*, C*b*, C*b*, sont entre elles respectivement comme les cosinus des angles que fait la droite CZ avec les rayons CA, CB, CB'; et la droite CZ est le diamètre d'une sphère qui passe par les points C, *a*, *b*, *b'*; ou qui est circonscrite au tétraèdre dont les sommets sont C, *a*, *b*, *b'*.

Or, le quarré du diamètre de la sphère circonscrite à un tétraèdre est exprimé, comme il suit, d'une manière symétrique, dans les élémens d'un de ses angles solides.

Soit prise la somme des trois produits des quarrés de chacune des arêtes de cet angle solide par le quarré du sinus de la face opposée.

Soit prise la double somme des trois produits continuels des arêtes deux à deux par les sinus des deux faces non comprises entre ces arêtes et par le cosinus de l'inclinaison de ces deux faces.

De la première somme soit retranchée la seconde.

Que l'excès soit divisé par le quadruple du produit continuel des sinus de la demi-somme des trois faces et des excès de cette demi-somme sur chacune d'elles.

Le quotient qu'on obtient est le quarré du diamètre de la sphère cherchée.

Partant on a, dans le cas présent,

$$CZ^2=\frac{1}{4P}\left\{\begin{array}{l} Ca^2.\text{Sin}.BB'-2Cb.Cb'.\text{Sin}.AB.\text{Sin}.AB'.\text{Cos}.A \\ +Cb^2.\text{Sin}.AB'-2Ca.Cb'.\text{Sin}.AB.\text{Sin}.BB'.\text{Cos}.B \\ +Cb'^2.\text{Sin}.AB-2Ca.Cb.\text{Sin}.AB'.\text{Sin}.BB'.\text{Cos}.B' \end{array}\right\}$$

$$=\frac{r^2}{4S^2}\left\{\begin{array}{l} AB^2-2.AB'.BB'.\text{Cos}.B' \\ +AB'^2-2.AB.BB'.\text{Cos}.B \\ +BB'^2-2.AB.AB'.\text{Cos}.A \end{array}\right\};$$

Savoir: *Le quarré de la distance du centre des moyennes distances d'un triangle sphérique au centre de la sphère à laquelle il appartient, est au quarré du rayon de cette sphère, comme l'excès de la somme des quarrés des côtés de ce triangle sur le double de la somme de leurs produits, deux à deux, par les cosinus de leurs inclinaisons, est au quarré du double de la surface du triangle.*

Pour abréger, soit le troisième terme de cette proportion désigné par Q^2, on aura $CZ=\frac{r}{2S}\cdot Q$; d'où on conclura

$$\text{Cos.}ZCA=\frac{Ca}{CZ}=\frac{r\cdot\frac{\sqrt{P}}{2S}\cdot\frac{BB'}{\text{Sin.}BB'}}{\frac{r}{S}\cdot Q}=\frac{\sqrt{P}}{2Q}\cdot\frac{BB'}{\text{Sin.}BB'}.$$

On aura donc

$$\text{Cos.}ZCA=\frac{\sqrt{P}}{2Q}\cdot\frac{BB'}{\text{Sin.}BB'},$$

$$\text{Cos.}ZCB=\frac{\sqrt{P}}{2Q}\cdot\frac{AB'}{\text{Sin.}AB'},$$

$$\text{Cos.}ZCB'=\frac{\sqrt{P}}{2Q}\cdot\frac{AB}{\text{Sin.}AB}.$$

Partant, la position du centre des moyennes distances d'un triangle sphérique proposé est entièrement déterminée, soit par la position du rayon sur lequel ce centre se trouve, ou par les inclinaisons de ce rayon aux rayons menés aux trois sommets, soit par la distance de ce centre au centre de la sphère à laquelle ce triangle appartient.

Exemple. Que le triangle proposé soit un octant, on aura

$$CZ^2=\tfrac{1}{4}r^2\ ; \qquad CA=CB=CB'=\tfrac{1}{2}r$$

Application. La distance au sommet du centre des moyennes distances d'une pyramide dont la base est un triangle sphérique, est $\frac{3}{4}r.\frac{Q}{S}$.

Que le triangle soit un octant, cette distance sera $\frac{3\sqrt{3}}{8}r=\frac{11}{17}r$ à peu près.

§. 9.

Au lieu d'exprimer, comme je l'ai fait dans le § précédent, le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre dans les neuf élémens

de l'un de ses angles solides, savoir : dans les trois arêtes de cet angle solide, dans les angles que font ces arêtes deux à deux, enfin dans les angles que forment deux à deux les faces qui les contiennent; il est aisé d'exprimer ce rayon dans six seulement de ces élémens, en substituant aux inclinaisons des faces les angles de ces faces et réciproquement.

Mais, de même que le rayon du cercle circonscrit à un triangle peut être exprimé dans deux seulement des élémens de ce triangle : savoir, dans un de ses côtés et dans l'angle qui lui est opposé; on peut aussi exprimer le rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre dans quatre seulement des élémens de ce tétraèdre : savoir, dans une de ses arêtes, dans l'inclinaison des deux faces dont cette arête est la commune section et dans les angles opposés à cette arête dans les plans de ces faces.

En effet, soient A, A′ (fig. 4) les extrémités de l'une des arêtes d'un tétraèdre; soient B, B′, les sommets apposés à cette arête, dans les plans des faces ABA, AB′A′; que les angles B, B′, soient donnés; et que l'inclinaison BAA′B′ de ces deux faces soit aussi donnée. Je dis que le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre est déterminé par ces quatre élémens du tétraèdre.

Soient C, C′ les centres respectifs des cercles circonscrits aux faces ABA′, AB′A′; l'arête AA′ ainsi que les angles B, B′, étant donnés, les points C, C′ seront donnés sur les plans de ces faces.

De ces points C, C′, soient abaissées sur l'arête AA′ des perpendiculaires; elles rencontreront cette arête au même point D qui en est le milieu, et l'angle CDC′ sera l'inclinaison connue des deux faces ABA′, AB′A′.

Des points C, C′, soient élevées aux plans des faces ABA′, AB′A′, des perpendiculaires qui se coupent en Z, le point Z sera le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre proposé.

Or, dans le quadrilatère CDC′Z dont les angles sont donnés, et dont les côtés CD, C′D, sont aussi donnés, la diagonale DZ est déterminée, et partant, le quarré de AZ qui est égal à la somme des quarrés de DZ et de AD, est aussi déterminé.

Calcul. $CD=AD.\text{Cot}.B$, $C'D=AD.\text{Cot}.B'$,

$$DZ^2=\frac{CC'^2}{\text{Sin}.^2D} ;$$

$$CC'^2=CD^2+C'D^2-2CD.C'D.\text{Cos}.D=AD^2\{\text{Cot}.^2B-2\text{Cot}.B.\text{Cot}.B'.\text{Cos}D+\text{Cot}.^2B'$$

donc

$$DZ^2=AD^2.\frac{\text{Cot}.^2B-2\text{Cot}.B.\text{Cot}.B'.\text{Cos}.D+\text{Cot}.^2B'}{\text{Sin}.^2D} ;$$

donc aussi

$$AZ^2=AD^2+DZ^2=\frac{1}{4}AA'^2\left\{1+\frac{\text{Cot}.^2B-2\text{Cot}.B.\text{Cot}.B'.\text{Cos}.D+\text{Cot}.^2B'}{\text{Sin}.^2D}\right\}.$$

De là on peut exprimer le rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre dans les élémens de l'un de ses angles solides tels que A, en substituant à Cot.B et Cot.B, les valeurs suivantes.

$$\text{Cot}.B=\frac{AB-AA'.\text{Cos}.BAA'}{AA'.\text{Sin}.BAA'} , \quad \text{Cot}.B'=\frac{AB'-AA'.\text{Cos}.B'AA'}{AA'.\text{Sin}.B'AA'} .$$

TRIGONOMÉTRIE.

Démonstrations de quelques formules de trigonométrie sphérique ;

Par M. SERVOIS, professeur de mathématiques aux écoles d'artillerie de Lafère.



I.

On trouve, dans les œuvres de *Goudin* (Paris 1803), un mémoire qui a pour titre : *Usages de l'ellipse dans la trigonométrie sphérique*, et où l'auteur, entre autres applications, s'occupe de la résolution de l'équation

Cos.

$$\text{Cos.}\alpha+A\text{Sin.}\alpha=B \qquad (1)$$

dans laquelle α est l'inconnue, et A, B, des quantités données dont la dernière n'excède pas l'unité.

On peut parvenir fort simplement au but sans recourir aux propriétés de l'ellipse dont l'emploi, en cette rencontre, semble tout à fait hors de propos.

Soient posés, en effet,

$$B=\text{Cos.}\beta\ , \qquad (2)$$

$$A=\text{Sin.}\beta\,.\,\text{Cot.}\gamma \qquad (3)$$

l'équation (1) deviendra

$$\text{Cos.}\alpha+\text{Sin.}\alpha.\text{Sin.}\beta.\text{Cot.}\gamma-\text{Cos.}\beta=0\ ,$$

d'où on tire en doublant,

$$\frac{2\text{Cos.}\alpha-2\text{Cos.}\beta}{\text{Sin.}\alpha.\text{Sin.}\beta}=-2\text{Cot.}\gamma=-\frac{2\text{Cos.}\gamma}{\text{Sin.}\gamma}\ ,$$

ou encore

$$\frac{(1+\text{Cos.}\alpha)(1-\text{Cos.}\beta)-(1-\text{Cos.}\alpha)(1+\text{Cos.}\beta)}{\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\beta}=\frac{(1-\text{Cos.}\gamma)-(1+\text{Cos.}\gamma)}{\text{Sin.}\gamma}\ ;$$

équation qui peut être mise sous cette forme

$$\frac{2\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}\alpha.2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\beta-2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\alpha.2\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}\beta}{2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\alpha\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\alpha.2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\beta\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\beta}=\frac{2\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\gamma-2\text{Cos.}^2\tfrac{1}{2}\gamma}{2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\gamma\text{Cos.}\tfrac{1}{2}\gamma}\ ,$$

ou en simplifiant,

$$\text{Cot.}\tfrac{1}{2}\alpha.\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\beta-\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\alpha.\text{Cot.}\tfrac{1}{2}\beta=\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\gamma-\text{Cot.}\tfrac{1}{2}\gamma\ ;$$

équation qui peut être écrite ainsi

$$(\text{Cot.}\tfrac{1}{2}\alpha-\text{Cot.}\tfrac{1}{2}\beta.\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\gamma)(\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\beta+\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\alpha.\text{Cot.}\tfrac{1}{2}\gamma)=0\ ;$$

égalant successivement chaque facteur à zéro, on obtiendra

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\alpha=\ \ \text{Tang.}\tfrac{1}{2}\beta.\text{Cot.}\tfrac{1}{2}\gamma\ , \qquad (4)$$

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\alpha=-\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\beta.\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\gamma\ . \qquad (5)$$

Ainsi, en supposant $B<1$, et c'est le cas des applications trigonométriques, on obtiendra l'angle auxiliaire β par l'équation (2); l'équation (3) donnera ensuite l'angle auxiliaire γ, et on obtiendra enfin les deux valeurs de α par les formules (4), (5); ce qui est exactement conforme aux résultats obtenus par *Goudin*.

II.

M. Gauss a donné, sans démonstration (*), les formules trigonométriques que voici: a, b, c, étant les trois côtés d'un triangle sphérique, et A, B, C, les angles respectivement opposés, on a

$$\text{I.}\qquad \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}c}=\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}C},$$

$$\text{II.}\qquad \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}c}=\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}C},$$

$$\text{III.}\qquad \frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}c}=\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{Cos}\frac{1}{2}C},$$

$$\text{IV.}\qquad \frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}c}=\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}C}.\ (**)$$

Il m'a paru que ces formules pouvaient être assez facilement démontrées comme il suit.

Les équations fondamentales de la trigonométrie sphérique sont, comme l'on sait,

$$\text{Sin}.b\text{Sin}.c\text{Cos}.A=\text{Cos}.a-\text{Cos}.b\text{Cos}.c,\qquad \text{Sin}.B\text{Sin}.C\text{Cos}.a=\text{Cos}.A+\text{Cos}.B\text{Cos}.C,$$

$$\text{Sin}.a\text{Sin}.c\text{Cos}.B=\text{Cos}.b-\text{Cos}.a\text{Cos}.c,\qquad \text{Sin}.A\text{Sin}.C\text{Cos}.b=\text{Cos}.B+\text{Cos}.A\text{Cos}.C,$$

$$\text{Sin}.a\text{Sin}.b\text{Cos}.C=\text{Cos}.c-\text{Cos}.a\text{Cos}.b;\qquad \text{Sin}.A\text{Sin}.B\text{Cos}.c=\text{Cos}.C+\text{Cos}.A\text{Cos}.B.$$

(*) Voyez *Théoria motus corporum cœlestium*; Hambourg, 1809, page 51.

(**) Ces formules ont aussi été données par M. *Delambre*, dans la *Connaissance des temps pour* 1809, page 445.

(*Notes des éditeurs.*)

Eliminant, dans les équations des deux premières lignes, $\text{Cos}.c$ et $\text{Cos}.C$, au moyen de celles de la dernière, en se rappelant que $1-\text{Cos}.x^2=\text{Sin}.x^2$, et supprimant ensuite le facteur commun à tous les termes des équations résultantes, il viendra

$$\text{Sin}.c\text{Cos}.A=\text{Cos}.a\text{Sin}.b-\text{Sin}.a\text{Cos}.b\text{Cos}.C\,,\quad \text{Sin}.C\text{Cos}.a=\text{Cos}.A\text{Sin}.B+\text{Sin}.A\text{Cos}.B\text{Cos}.c\,,$$

$$\text{Sin}.c\text{Cos}.B=\text{Sin}.a\text{Cos}.b-\text{Cos}.a\text{Sin}.b\text{Cos}.C\,,\quad \text{Sin}.C\text{Cos}.b=\text{Sin}.A\text{Cos}.B+\text{Cos}.A\,\text{Sin}.B\text{Cos}.c\,;$$

en ajoutant et retranchant successivement les équations de chaque colonne, les résultats qui en proviendront, pourront être écrits ainsi

$$\text{Sin}.c(\text{Cos}.B+\text{Cos}.A)=(1-\text{Cos}.C)\text{Sin}.(a+b)\,,\quad \text{Sin}.C(\text{Cos}.b+\text{Cos}.a)=(1+\text{Cos}.c)\text{Sin}.(A+B)\,,$$

$$\text{Sin}.c(\text{Cos}.B-\text{Cos}.A)=(1+\text{Cos}.C)\text{Sin}.(a-b)\,,\quad \text{Sin}.C(\text{Cos}.b-\text{Cos}.a)=(1-\text{Cos}.c)\text{Sin}.(A-B)\,;$$

en observant que

$$\text{Cos}.y+\text{Cos}.x=2\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(x+y)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(x-y)\,,\quad \text{Cos}.y-\text{Cos}.x=2\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(x+y)\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(x-y)$$

$$1-\text{Cos}.x=2\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}x\,,\qquad 1+\text{Cos}.x=2\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}x\,,$$

$$\text{Sin}.x=2\text{Sin}.\tfrac{1}{2}x\text{Cos}.\tfrac{1}{2}x\,,$$

ces équations deviendront

$$2\text{Sin}.c.\,\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(A+B)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(A-B)=4\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}C.\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(a+b)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(a+b)\,,$$

$$2\text{Sin}.c.\,\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(A+B)\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(A-B)=4\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}C.\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(a-b)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(a-b)\,,$$

$$2\text{Sin}.C.\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(a+b)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(a-b)=4\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}c.\,\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(A+B)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(A+B)\,,$$

$$2\text{Sin}.C.\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(a+b)\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(a-b)=4\text{Cos}.^2\tfrac{1}{2}c.\,\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(A-B)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(A-B)\,;$$

divisant successivement les deux premières par chacune des deux dernières, il viendra

$$\frac{\text{Sin}.c}{\text{Sin}.C}=\left\{\frac{\text{Sin}.\tfrac{1}{2}C.\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{Cos}.\tfrac{1}{2}c.\,\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(A+B)}\right\}^2.\,\frac{\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(a+b)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(A+B)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(A-B)}\,,$$

$$\frac{\text{Sin}.c}{\text{Sin}.C}=\left\{\frac{\text{Sin}.\tfrac{1}{2}C.\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{Sin}.\tfrac{1}{2}c.\,\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(A-B)}\right\}^2.\,\frac{\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(a-b)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(A-B)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(A+B)}\,,$$

$$\frac{\text{Sin}.c}{\text{Sin}.C}=\left\{\frac{\text{Cos}.\tfrac{1}{2}C.\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{Cos}.\tfrac{1}{2}c.\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(A+B)}\right\}^2.\,\frac{\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(a-b)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(A-B)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(A+B)}\,,$$

$$\frac{\text{Sin}.c}{\text{Sin}.C}=\left\{\frac{\text{Cos}.\tfrac{1}{2}C.\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{Sin}.\tfrac{1}{2}c.\,\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(A-B)}\right\}^2.\,\frac{\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(a+b)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(A+B)\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(A-B)}\,;$$

mais, par la proportionnalité des sinus des angles aux sinus des côtés opposés, on a

$$\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b)\text{Cos.}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(A+B)\text{Cos.}\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{\text{Sin.}\,a+\text{Sin.}\,b}{\text{Sin.}A+\text{Sin.}B}=\frac{\text{Sin.}c}{\text{Sin.}C}$$

$$\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a-b)\text{Cos.}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(A-B)\text{Cos.}\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\text{Sin.}\,a-\text{Sin.}\,b}{\text{Sin.}A-\text{Sin.}B}=\frac{\text{Sin.}c}{\text{Sin.}C},$$

susbtituant donc, réduisant et extrayant la racine quarrée, on tombera sur les formules annoncées. On se convaincra d'ailleurs que les racines doivent toutes être prises avec le signe $+$, en considérant le cas particulier où le triangle serait bi-rectangle en B et C; on aurait alors $B=C=b=c=q$, q étant le cadran et $A=a$; valeurs qui ne peuvent satisfaire qu'avec le signe $+$.

Il est presque superflu d'observer que les formules I, II, III, IV, donnent, en les combinant, par voie de division, les *Analogies de Néper*, lesquelles se trouvent ainsi démontrées par ce qui précède.

QUESTIONS RÉSOLUES.

N. B. Le défaut d'espace, le grand nombre des solutions obtenues pour les mêmes problèmes et l'analogie entre ces solutions obligeront souvent à l'avenir les Rédacteurs des *Annales* à les comprendre toutes dans un seul article et à n'en présenter qu'une courte analise. Ils auront soin, au moins, d'être équitables et de ne rien omettre de ce qui pourra piquer la curiosité de leurs lecteurs.

Solutions des deux problèmes proposés à la page 384 du premier volume des Annales;

Par MM. Rochat, Vecten, Fauquier, Pilatte, etc.

PROBLÈME I. *A un triangle donné circonscrire un triangle semblable à un autre triangle donné, et qui soit le plus grand possible?*

PROBLÈME II. A un triangle donné inscrire un triangle semblable à un autre triangle donné, et qui soit le plus petit possible ?

MM. *Rochat*, professeur de navigation à Saint-Brieux, *Vecten*, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Nismes, et *Fauquier*, élève du même lycée, ont également fondé les solutions qu'ils ont données de ces deux problèmes sur les considérations suivantes.

1.° Deux triangles t et t' étant donnés d'espèce, et deux autres triangles T, T', respectivement semblables à ceux-là, étant inscrits l'un à l'autre, T' à T par exemple; si T' est le plus petit des triangles semblables à t' qu'il soit possible d'inscrire à T, ce triangle T sera le plus grand des triangles semblables à t qu'il soit possible de circonscrire à T', et réciproquement.

Voici à peu près de quelle manière M. *Rochat* démontre cette proposition. Soit ABC (fig. 5) un triangle semblable à t, et soit DEF le plus petit de tous les triangles semblables à t' qu'il soit possible de lui inscrire. Si ABC n'est pas le plus grand des triangles semblables à t qu'il soit possible de circonscrire à DEF, on pourra circonscrire à ce dernier un triangle semblable à t, plus grand que ABC; soit A'B'C' ce triangle; soient coupés les côtés de ABC en D', E', F', comme le sont ceux de A'B'C' en D, E, F, et soit formé le triangle D'E'F'. Ce dernier étant disposé par rapport à ABC de la même manière que l'est le triangle DEF par rapport au triangle A'B'C', on doit avoir évidemment

$$\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{D'E'F'}{DEF};$$

si donc on pouvait avoir $A'B'C'>ABC$, on devrait avoir aussi $DEF>D'E'F'$; ainsi, contrairement à l'hypothèse, le triangle D'E'F', semblable à t' comme DEF, et inscrit comme lui à ABC, serait moindre que DEF.

La réciproque de cette proposition n'est pas plus difficile à établir. Soit en effet ABC le plus grand des triangles semblables à t qu'il soit possible de circonscrire à DEF; si DEF n'est pas le plus petit de tous les triangles semblables à t' qu'il soit possible d'inscrire à ABC,

on pourra lui en inscrire un autre plus petit que DEF et toujours semblable à t'; soit D'E'F' ce triangle; par D, E, F, soient menées trois droites B'C', C'A', A'B', faisant avec ses côtés les mêmes angles que font BC, CA, AB, avec leurs homologues dans le triangle D'E'F'; le triangle A'B'C' se trouvant alors, par rapport au triangle DEF, ce qu'est le triangle ABC par rapport au triangle D'E'F', on aura

$$\frac{DEF}{D'E'F'}=\frac{A'B'C'}{ABC};$$

si donc on pouvait avoir $D'E'F'<DEF$, il faudrait qu'on eût aussi $ABC<A'B'C'$; ainsi, contrairement à l'hypothèse, le triangle A'B'C', semblable à t comme ABC, et circonscrit comme lui à DEF, serait plus grand que ABC.

2.° Si deux cercles se coupent, de toutes les droites menées par l'une de leurs intersections et terminées à leurs circonférences, la plus longue est la parallèle à la droite qui joint leurs centres, ou, ce qui revient au même, la perpendiculaire à leur corde commune; et la longueur de cette droite est double de la distance entre les centres des deux cercles (*).

Ces principes établis, voici à quoi se réduit la solution des deux problèmes proposés.

Solution du I.er problème. Soit ABC (fig. 6) un triangle donné, auquel il faille circonscrire un triangle semblable à un autre triangle donné *def*, et qui soit le plus grand possible.

Sur les côtés CA et CB du triangle ABC soient décrits extérieurement des arcs CEA, CDB respectivement capables des angles e et d; soient H et G les centres des cercles dont ces arcs font partie; soit I l'intersection de ces cercles, et soient menées HG et CI. Par le point C soit menée DE parallèle à GH, ou perpendiculaire à CI, et terminée en D et E aux deux arcs; en menant ensuite DB et EA concourant en F, le triangle DEF sera le triangle demandé.

(*) Voyez les pag. 24 et 26 de ce volume.

Solution du II.e problème. Soit ABC (fig. 7) un triangle donné, auquel il faille inscrire un triangle semblable à un autre triangle donné *def*, et qui soit le plus petit possible.

Au triangle *def* soit circonscrit (*problème I.*) un triangle *abc*, semblable au triangle ABC, et le plus grand possible; soient coupés les côtés du triangle ABC en D, E, F, de la même manière que le sont ceux du triangle *abc* en *d*, *e*, *f*; formant enfin le triangle DEF, ce sera le triangle demandé.

Ce qui précède suppose tacitement que l'on a indiqué, à l'avance, à quels côtés du triangle donné d'espèce seulement, doivent être homologues ceux des côtés du triangle à circonscrire qui doivent passer par chacun des sommets du triangle donné à la fois d'espèce et de grandeur; ou à quels angles du triangle donné d'espèce seulement, doivent être homologues ceux des angles du triangle à inscrire dont les sommets doivent être sur chacun des côtés du triangle donné à la fois d'espèce et grandeur. S'il n'en était pas ainsi, il est clair que chacun des deux problèmes pourrait, en général, admettre six solutions; et qu'ainsi il y aurait lieu à un *maximum maximorum* ou à un *minimun minimorum*. M. *Rochat* à qui l'on doit cette remarque, a calculé les expressions de l'un des côtés du triangle cherché qui répondent à ces six solutions; mais il n'a pas eu le loisir de les discuter.

Ces six solutions se réduisent à une seule lorsque le triangle à construire est équilatéral. M. *Vecten* observe à ce sujet que, si, dans ce cas on mène du point I (fig. 6) des droites aux points A, B, C, ces droites, respectivement perpendiculaires aux côtés du triangle DEF, feront, autour du point I, des angles égaux entre eux et au tiers de quatre angles droits, d'où il suit qu'alors le point I sera celui dont la somme des distances aux sommets A, B, C, du triangle donné, est la plus petite.

Ainsi, *le plus grand triangle équilatéral qu'il soit possible de circonscrire à un triangle donné est celui dont les côtés sont perpendiculaires aux droites qui joignent aux sommets de ce triangle*

donné le point dont la somme des distances à ces sommets est la plus petite.

Et, comme la somme des distances aux trois côtés d'un triangle équilatéral d'un point quelconque pris dans son intérieur, est égale à la hauteur de ce triangle, il en faut conclure que *la hauteur du plus grand triangle équilatéral qu'il soit possible de circonscrire à un triangle donné, est égale à la somme des droites menées aux sommets de ce triangle du point dont la somme des distances à ces sommets est la plus petite.*

M. *Pilatte*, professeur de mathématiques spéciales au lycée d'Angers, ancien élève de l'école polytechnique, a traité ces deux problèmes par l'analise et d'une manière tout à fait différente de celle qui vient d'être expliquée. Il a d'abord soin d'observer que, par triangle *circonscrit* à un triangle donné, il faut entendre un triangle dont les côtés, *prolongés s'il le faut*, passent par les sommets du triangle donné: et que, par triangle *inscrit* à un triangle donné, il faut entendre un triangle dont les sommets sont sur les côtés ou *sur les prolongemens* des côtés du triangle donné. Il se propose ensuite ces deux problèmes :

1.° *Connaissant les coordonnées des sommets d'un triangle* T, *déterminer l'expression de la surface* S *d'un triangle circonscrit à celui-là et semblable à un triangle donné* t ?

2.° *Connaissant les coordonnées des sommets d'un triangle* T, *déterminer l'expression de la surface* S′ *d'un triangle inscrit à celui-là et semblable à un triangle donné* t ?

Ces problèmes étant l'un et l'autre indéterminés, les expressions trouvées par M. *Pilatte* pour S et S′, sont fonctions d'une certaine arbitraire α qui est la tangente tabulaire de l'angle que fait l'un des côtés du triangle cherché avec l'axe des x; ainsi les triangles S et S′ peuvent être assujettis à une nouvelle condition choisie comme on voudra.

Supposant donc 1.° que les triangles S et S′ doivent être à la fois égaux et semblables au triangle t, α se trouve donné pour l'un et l'autre par des équations du second degré, et les deux problèmes proposés à la page 318 du 1.er volume des *Annales* se trouvent ainsi résolus.

Supposant,

Supposant, 2.° que les surfaces S et S′ doivent être des *maxima* ou des *minima*, M. *Rochat* trouve pour S un *maximum* fini et un *minimum* zéro et pour S′ un *minimum* fini et un *maximum* infini.

Passant alors au cas particulier où le triangle demandé doit être équilatéral, M. *Rochat* détermine les valeurs de α qui, dans ce cas, conviennent au *maximum* de S et au *minimum* de S′, et il enseigne à construire ces valeurs.

Retournant ensuite aux valeurs générales de S et S′ et supposant que l'indéterminée α est la même dans l'une et dans l'autre, ou, ce qui revient au même, que les côtés homologues des triangles S et S′, le premier circonscrit et le second inscrit à T sont parallèles ; il obtient, en multipliant ces valeurs, $SS'=T^2$, d'où il conclut cet élégant théorème.

Si à un triangle quelconque T *on en circonscrit un autre aussi quelconque* T′ *; qu'à celui-ci on en circonscrive un troisième* T″, *ayant ses côtés respectivement parallèles à ceux de* T ; *puis, qu'on circonscrive à* T″ *un nouveau triangle* T‴, *dont les côtés soient respectivement parallèles à ceux de* T′, *et ainsi de suite, les aires des triangles* T, T′, T″, T‴,..., *lesquels seront semblables de deux en deux, formeront une progression par quotiens.*

Nous croyons devoir, à ce sujet, mentionner ici un autre théorème fort analogue à celui-là, et qui se démontre facilement, soit par l'analise, soit par la géométrie.

Si des triangles T, T′, T″, T‴, ..., *sont tels que les côtés de chacun soient respectivement égaux aux droites qui, dans celui qui le précède, joignent les sommets des angles aux milieux des côtés opposés ; les aires de ces triangles, lesquels seront semblables de deux en deux, formeront une progression décroissante par quotiens dont la raison sera* $\frac{9}{16}$.

Nous terminerons par observer que les deux problèmes qui font le sujet principal de cet article, ont été résolus par M. *Lhuilier*, dans les *Élémens d'analise géométrique et d'analise algébrique*, ouvrage remarquable par le grand nombre des problèmes qui y sont traités.

Démonstrations du théorème énoncé à la page 384 du 1.er volume des Annales ;

Par MM. Servois, Lhuilier, Rochat, Labrousse, Fauquier, etc.



Théorème. *Le volume d'un tronc de prisme quelconque, droit ou oblique, s'obtient en multipliant l'aire de l'une quelconque de ses bases par la perpendiculaire abaissée sur son plan du centre de gravité de l'aire de l'autre base.*

Toutes les démonstrations qu'on a données de ce théorème reposent sur les deux propositions suivantes.

1.° Le volume d'un tronc de prisme triangulaire, droit ou oblique, s'obtient en multipliant l'aire de l'une quelconque de ses bases par la perpendiculaire abaissée sur son plan du centre de gravité de l'aire de l'autre base.

2.° Si l'on décompose les deux bases d'un tronc de prisme quelconque en triangles, par des diagonales correspondantes, les aires des triangles homologues seront dans un rapport constant qui sera celui des aires des bases elles-mêmes.

La première de ces propositions est une suite de ce que le volume d'un tronc de prisme triangulaire est le produit de l'aire de l'une quelconque de ses bases par le tiers de la somme des perpendiculaires abaissées sur son plan des sommets de l'autre base, et de ce que la distance du centre de gravité de l'aire d'un triangle à un plan quelconque est le tiers de la somme des distances de ses sommets au même plan (*).

(*) La vérité de cette dernière proposition s'aperçoit sur-le-champ, en remarquant que le centre de gravité de l'aire d'un triangle est le même que le centre commun de gravité de trois masses égales situées à ses sommets.

La seconde proposition n'est pas plus difficile à démontrer. Qu'on imagine en effet une section perpendiculaire aux arêtes latérales, et que cette section soit décomposée en triangles correspondants à ceux des deux bases; comme ces derniers seront les projections des premiers sur le plan coupant, ils seront à la fois entre eux dans le rapport des triangles de l'une des bases et dans le rapport des triangles de l'autre; d'où il suit que les triangles correspondants de l'une et de l'autre base seront eux-mêmes dans un rapport constant.

Pour parvenir, d'après ces principes, à la démonstration du théorème, MM. *Labrousse*, maître de mathématiques à Nismes, et *Fauquier*, élève du lycée de la même ville, ont démontré, par la composition des forces parallèles, que, si la proposition était vraie pour un tronc de prisme ayant des bases de $n-1$ côtés, elle devait l'être aussi pour un tronc de prisme ayant des bases de n côtés; et ils en ont conclu que la proposition étant vraie, en effet, pour des troncs de prismes triangulaires, elle devait être vraie pour des troncs de prismes quelconques.

Les démonstrations données par MM. *Servois*, *Lhuilier* et *Rochat* reviennent au fond à ce qui suit:

Soient Π la base supérieure du tronc et G la distance de son centre de gravité au plan de la base inférieure; soient τ, τ', τ'',..., les triangles résultant de la décomposition de cette base et g, g', g'',..., les distances de leurs centres de gravité particuliers au plan de la base inférieure; soit P cette base et t, t', t'',..., les triangles résultant de sa décomposition et correspondant à τ, τ', τ'',...; soit enfin V le volume du tronc, on aura d'abord

$$V=tg+t'g'+t''g''+\dots\dots;$$

mais, m étant un nombre constant choisi convenablement, on doit avoir

$$P=m\Pi\,,\qquad t=m\tau\,,\qquad t'=m\tau'\,,\qquad t''=m\tau''\,,\dots\dots,$$

ce qui donne d'abord

$$V=m(\tau g+\tau' g'+\tau'' g''+\dots\dots)\,;$$

mais on a, par le principe des momens,

$$vg+v'g'+v''g''+\ldots\ldots=\Pi G,$$

donc enfin

$$V=m\Pi G=PG.$$

Les rédacteurs des *Annales* ont reçu diverses autres démonstrations du même théorème qui rentrent toutes dans les précédentes. Les auteurs de quelques-unes d'entre elles ont remarqué que la même proposition pouvait être étendue aux troncs de cylindres droits ou obliques à bases quelconques. L'un d'eux a observé, en outre, qu'il suivait de cette proposition qu'on ne change pas le volume d'un tronc de prisme ou de cylindre, droit ou oblique, à base quelconque, en substituant à l'une de ses bases une autre base passant par le centre de gravité de l'aire de celle-là.

Le théorème qui fait le sujet de cet article se trouve traité par M. *Blondat*, dans le dernier cahier de la *Correspondance sur l'école polytechnique* (janvier 1811, pag. 267).

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorème d'analise.

On propose de démontrer l'équation suivante :

$$1.2.3.4\ldots\ldots m=(m+1)^m-m^{m+1}+\frac{m}{1}.\frac{(m-1)^{m+1}}{2}-\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{(m-2)^{m+1}}{3}$$
$$+\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{(m-3)^{m+1}}{4}+\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{(m-4)^{m+1}}{5}-\ldots$$

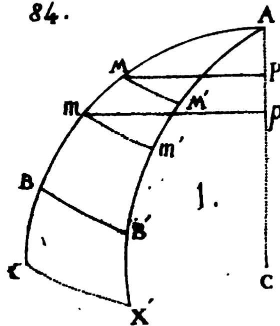
Problème de statique.

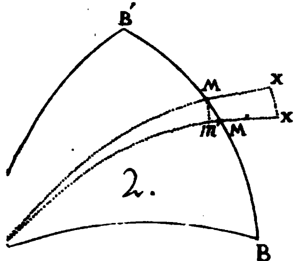
Une table triangulaire, dont les dimensions sont données, est soutenue horisontalement, à ses trois angles, par trois piliers verticaux dont les forces F, F′, F″ sont données. On demande

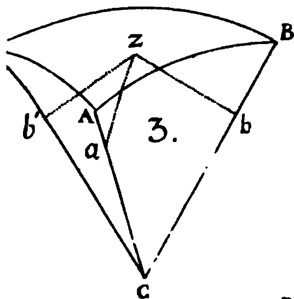
1.° Le plus grand poids que peut supporter chaque point de la table ;

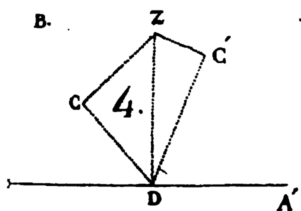
2.° La courbe renfermant tous les points de la table qui peuvent supporter un poids donné P ?

84.

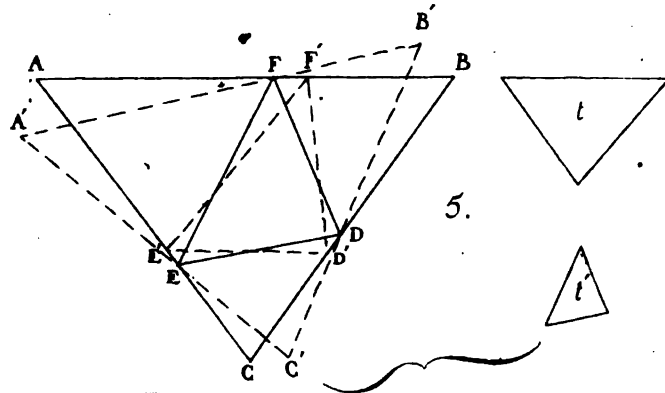


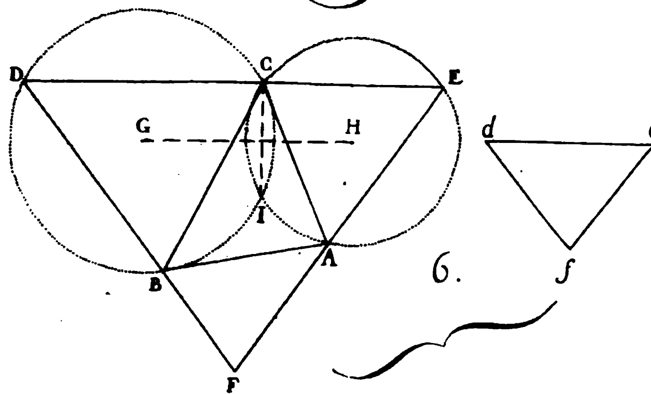


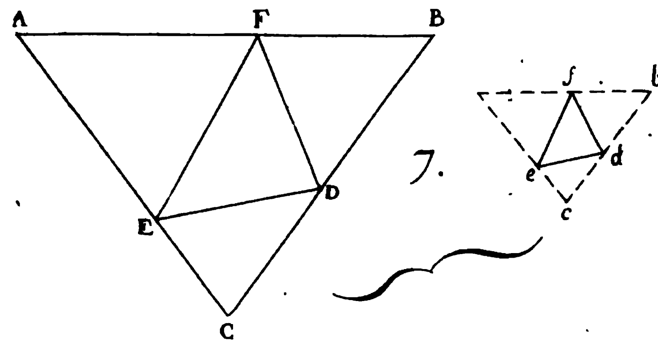




p. 88 - 96.







J. D. G. fecit

ASTRONOMIE.

Examen d'une nouvelle théorie du mouvement de la terre, proposée par le docteur WOOD ;

Par M. D. ENCONTRE, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Montpellier.



LE n.° 372 de la *Bibliothèque britannique*, et le n.° 118 du *journal de* NICHOLSON annoncent « une nouvelle théorie de la rotation » diurne de la terre, démontrée d'après les principes mathématiques, » et fondée sur les propriétés de la cycloïde et de l'épicycloïde; avec » une application de cette théorie aux phénomènes des vents, des marées » et des concrétions pierreuses et métalliques qui tombent des cieux » sur la terre. »

La théorie dont il s'agit se trouve amplement développée dans un grand ouvrage publié à Richmond, en Virginie, par le docteur WOOD; mais, les libraires de ce pays-là n'ayant pas de communications bien régulières avec les nôtres, on ne connaît guère cet ouvrage en France que par l'extrait qu'en ont donné les auteurs de la *Bibliothèque britannique*; extrait qui, bien que peu étendu, renferme heureusement tout ce qu'il faut pour éclairer l'opinion des physiciens géomètres. Nous pouvons, en effet, nous passer des raisonnemens du docteur Wood, pourvu que nous ayons une idée bien nette des principes sur lesquels il les établit. Ce sont ces principes, tels du moins que la *Bibliothèque britannique* nous les donne, que je me propose de soumettre ici

à une analise rigoureuse. Il est d'autant plus nécessaire de les bien discuter que les conséquences en sont tout-à-fait alarmantes, et ne tendent à rien moins qu'à renverser entièrement le magnifique édifice de la Mécanique céleste.

Le premier principe posé par le docteur Wood est que, lorsqu'un cercle roule sur une ligne droite ou courbe, la partie supérieure de ce cercle est animée d'une vitesse plus grande que celle de sa partie inférieure.

Le second est que, la vitesse variant dans les différens points de la même circonférence, il est absolument nécessaire que la force centrifuge y varie aussi. Le docteur Wood regarde ce second principe comme une conséquence mathématique et rigoureuse du premier. Examinons, avec quelque détail, jusqu'à quel point et dans quel sens son opinion peut être admise.

§. 1.

QUESTION. Lorsque la roue d'un char, ou tout autre cercle solide, roule sur une ligne droite, la partie supérieure de la circonférence a-t-elle plus de vitesse que n'en a sa partie inférieure ?

1. Cette question qui fut, dit-on, le sujet d'un pari considérable, entre quelques savans Anglo-Américains, n'est pas bien difficile à résoudre. On conçoit, en effet, qu'au point le plus élevé de la roue, le mouvement de rotation et le mouvement de translation s'exécutent dans le même sens, tandis qu'au point le plus bas, qui est aussi le point tangent, ils ont lieu en sens contraire. La vitesse absolue du point le plus élevé est donc la somme des vitesses de rotation et de translation, tandis que la vitesse absolue du point le plus bas en est la différence : ces deux vitesses sont donc essentiellement inégales. La première peut même être infiniment plus grande que la seconde ; et c'est ce qui arrive, lorsque la vitesse de translation est égale à la vitesse de rotation ; car alors la vitesse absolue du point le plus bas est sensiblement nulle, tandis que celle du point le plus haut est double de celle du centre.

§. 2.

Généralisation de la question précédente.

2. Ces expressions : *partie supérieure*, *partie inférieure*, *point le le plus haut*, *point le plus bas*, ont quelque chose d'équivoque et peuvent induire en erreur, sur-tout lorsqu'on en fait usage en astronomie et qu'on dit, avec le docteur Wood, qu'un même point de la terre est plus haut, quand on y compte midi, qu'il ne l'est quand on y compte minuit.

D'un autre côté, la roue qui roule sur une droite et qui applique successivement chacun de ses points sur cette droite, de manière que la longueur parcourue, pendant le temps que dure une révolution entière, soit exactement égale à la circonférence de la roue, ne nous présente qu'un cas très-particulier de la génération des cycloïdes.

Il importe donc de se faire un langage plus géométrique, et de considérer la question sous un point de vue plus général et plus simple à la fois, en concevant toutes les cycloïdes, tant communes qu'allongées et raccourcies, engendrées par un point pris sur la circonférence d'un cercle qui tourne autour de son centre, tandis que ce centre est lui-même emporté, d'un mouvement uniforme, le long d'une droite située dans le plan du cercle tournant.

3. Soient AB, DD′ (fig. 1) deux diamètres d'un même cercle se coupant à angles droits. Soient EE′, FF′ deux droites qui touchent le cercle aux points A, B, et qui par conséquent sont parallèles l'une à l'autre et au diamètre DD′. Que le cercle tourne uniformément autour de son centre, tandis que ce centre lui-même se meut uniformément le long de D′D. Chaque point S de la circonférence du cercle décrira une cycloïde, laquelle sera commune, accourcie ou allongée, suivant que l'espace parcouru par le centre du cercle, pendant une révolution, sera égal à sa circonférence, moindre que cette circonférence ou plus grand qu'elle.

4. Dans cette hypothèse, les droites EE′, FF′ paraissent être semblablement placées relativement au cercle tournant; et, si pour éviter

toute difficulté, on suppose le plan de ce cercle horizontal, il n'existera absolument aucune raison, soit physique soit géométrique, de regarder l'une de ces deux lignes comme supérieure et l'autre comme inférieure; mais, dès qu'on aura déterminé le sens de la rotation du cercle, et le sens de la translation de son centre, on reconnaîtra sans peine que le mouvement du point tangent à l'une des deux droites dont il s'agit, est très-différent du mouvement du point tangent à l'autre. Concevons, par exemple, que le centre se meuve dans le sens CD, et que le cercle tourne dans le sens AD; le point A, par le seul effet de son mouvement de rotation, doit décrire, au premier instant une petite droite suivant AE, et, par le seul effet de son mouvement de translation, une autre petite droite, dans le même sens. Il est donc évident que le point A, par l'effet simultané de ces deux mouvemens, doit décrire suivant AE, au premier instant où il se meut, un espace égal à la somme des espaces que ces deux mouvemens lui feraient séparément parcourir.

Le point B, au contraire, est sollicité par la rotation dans le sens BF′ et par la translation dans le sens BF, directement opposé. La vitesse réelle de ce point B, en vertu des deux mouvemens dont il est animé, n'est donc que la différence des vitesses que chacun de ces mouvemens tend à lui imprimer.

5. On voit donc clairement que, si un cercle tourne sur son centre, et se meut en même temps d'un mouvement rectiligne et uniforme, entre deux parallèles qu'il touche continuellement, les vitesses absolues des deux points tangens sont très inégales : l'un se mouvant avec la somme et l'autre avec la différence des vitesses de rotation et de translation. Il a plu au docteur Wood d'appeler *demi-circonférence supérieure*, celle qui contient le point tangent qui a la plus grande vitesse, et *demi-circonférence inférieure*, celle qui contient le point tangent qui a la moindre vitesse. Ainsi, dans notre hypothèse et dans son langage, DAD′ est la demi-conférence supérieure, et DBD′ est l'inférieure; mais si, le cercle continuant à tourner dans le même sens, son centre, au lieu d'aller de C vers D, allait dans le sens CD′, la demi-

circonférence DAD′ devrait être regardée comme inférieure, et la demi-circonférence DBD′ comme supérieure. Ceci suffira, sans doute, pour prévenir toute équivoque à cet égard.

§. 3.

Recherche de la vitesse absolue dans la cycloïde.

6. Quoi qu'il en soit du langage adopté par le docteur Wood, sa première proposition n'en est pas moins certaine, et, le point A se mouvant plus vite que le point B, nous sommes en droit d'affirmer que les différens points d'une même circonférence roulant sur une droite, ne sont pas tous animés d'une même vitesse absolue. Toute courbe d'ailleurs pouvant être regardée comme formée d'une infinité de petites droites, et tout mouvement comme une suite de petits mouvemens uniformes, la même proposition s'étend généralement à toute circonférence de cercle roulant d'un mouvement quelconque sur une courbe quelconque.

7 Mais il ne suffit pas de savoir que les différens points de la circonférence sont animés de vitesses inégales, il faut encore être en état de comparer la vitesse absolue d'un point avec celle d'un autre point quelconque, pris sur la même circonférence. Wood, en s'occupant de cette recherche, ne paraît pas avoir embrassé la question dans toute sa généralité, si du moins nous jugeons de son travail par l'extrait qu'en a donné la *Bibliothèque britannique*, où l'on ne trouve d'ailleurs qu'une formule algébrique, sans aucune trace de l'analise que l'auteur a pu suivre pour y parvenir. Il ne sera donc pas inutile de donner ici une solution directe et complette de ce problème intéressant.

8. Proposons-nous donc de trouver, dans l'hypothèse d'un cercle tournant uniformément sur son centre, avec une vitesse donnée, pendant que ce centre se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme avec une vitesse aussi donnée ; proposons-nous, dis-je, de déterminer la vitesse d'un point quelconque de la circonférence, laquelle est aussi la vitesse, au point correspondant de la cycloïde décrite. Soit S ce point, et soit sa position déterminée par le nombre de degrés de l'arc AS : le point A, que nous appellerons aussi l'ori-

gine, étant supposé celui des deux points tangens dont le mouvement de rotation est dirigé dans le sens du mouvement de translation.

Menons la tangente ST, et concevons qu'en vertu du mouvement de rotation, si lui seul avait lieu, le point S dût parcourir, pendant l'élément du temps, l'arc élémentaire SM, se confondant avec le prolongement de la tangente; et que le même point S, soumis au seul mouvement de translation, dût, dans le même temps, parcourir la petite droite SN, parallèle à BF. Soient m et n les quotiens respectifs de SM et SN par l'élément du temps; m et n seront ainsi les vitesses de rotation et de translation.

Achevons le parallélogramme SMNP; sa dianogale SP sera l'espace parcouru par le point S, pendant l'élément du temps, en vertu des mouvemens combinés de rotation et de translation; soit p le quotient de la division de SP par l'élément du temps; p sera conséquemment la vitesse absolue cherchée.

Soit prolongée NS jusqu'à la rencontre du diamètre AB en R, et soit mené le rayon CS; nous aurons MP=SN; de plus, à cause des angles égaux MSN et ACS, le dernier de ces angles sera supplément de SMP, en sorte qu'on aura

$$Cos.\mathrm{SMP}=-Cos.\overset{\frown}{\mathrm{AS}}\,;$$

or, par un des théorèmes fondamentaux de la trigonométrie, le triangle SMP donne

$$\overline{\mathrm{SP}}^2=\overline{\mathrm{SM}}^2+\overline{\mathrm{MP}}^2-2\overline{\mathrm{SM}}.\overline{\mathrm{MP}}.Cos.\mathrm{SMP}\;;$$

substituant donc, il viendra,

$$\overline{\mathrm{SP}}^2=\overline{\mathrm{SM}}^2+\overline{\mathrm{SN}}^2+2\overline{\mathrm{SM}}.\overline{\mathrm{SN}}.Cos.\mathrm{AS}\;,$$

ou enfin, en divisant par le quarré de l'élément du temps

$$p^2=m^2+n^2+2mn\mathrm{Cos.AS}.$$

Ainsi la vitesse de translation ou, ce qui revient au même, la vitesse du centre est à la vitesse absolue d'un point quelconque S de la circonférence, comme n est à $\sqrt{m^2+n^2+2mn.\mathrm{Cos.AS}}$; AS étant l'arc

compris entre ce point et celui dont la vitesse est la plus grande.

9. Si l'on suppose successivement que le point S devient chacun des points A, D, B, l'arc AS deviendra successivement o, AD, ADB; son cosinus deviendra donc successivement $+1$, 0, -1; on aura donc

pour le point A, $p=m+n$,

pour le point D, $p=\sqrt{m^2+n^2}$,

pour le point B, $p=m-n$;

le premier et le dernier de ces résultats sont, comme l'on voit, exactement conformes à ce que nous avions trouvé (1 et 4).

10. Si l'on observe que m et n sont tous deux positifs, et que Cos.AS est positif ou négatif, suivant que le point S se trouve entre A et D ou entre D et B, il sera facile d'en conclure que tout point situé entre le point A et le diamètre DD′ a plus de vitesse absolue que le point D, et qu'au contraire tout point situé entre le point B et le même diamètre a moins de vitesse absolue que le point D; de manière que la vitesse absolue croît sans cesse de D en A où elle atteint son *maximum*, tandis qu'au contraire elle décroît sans cesse de D en B où elle atteint son *minimum*.

11. Déterminons présentement les composantes de la vitesse absolue du point S, dans le sens des axes AB, DD′. Si nous abaissons PQ perpendiculaire sur RS, cette droite PQ exprimera la vitesse dans le sens AB, tandis que SQ exprimera la vitesse dans le sens CD; or $PQ=PM.\mathit{Sin}.AS=m.\mathit{Sin}.AS$ et $SQ=SN+NQ=n+m.\text{Cos}.AS$.

12. Si le point S, se détachant de la circonférence, se mouvait uniformément, dans la direction SP, avec la vitesse absolue que nous lui avons trouvée, et parvenait, au bout d'un certain temps t, au point S′, en abaissant de ce point une perpendiculaire S′I sur le prolongement de RS, on aurait.

$$SS'=t\sqrt{m^2+n^2+2mn.\text{Cos}.AS},$$

$$SI=tn+tm.\text{Cos}.AS,$$

$$S'I=tm.\text{Sin}.AS.$$

§. 4.

Détermination de la vitesse absolue dans les hélices. Relation curieuse entre les hélices et les cycloïdes.

13. Si, tandis que le cercle tourne uniformément autour de son centre, ce centre, au lieu de parcourir une droite située dans le plan du cercle, se meut uniformément sur une droite dirigée d'une manière quelconque dans l'espace, en sorte que cependant le plan du cercle reste constamment parallèle à un plan invariable ; chaque point de la circonférence décrira une sorte d'hélice.

14. Concevons d'abord que la droite directrice du centre soit perpendiculaire au plan du cercle générateur ; la courbe engendrée par un point quelconque de la circonférence sera l'hélice droite ou vulgaire, celle dont il s'agit dans la statique élémentaire, lorsqu'on y traite de l'équilibre de la vis.

Soit toujours m la vitesse de rotation ; soit q la vitesse de translation, perpendiculaire au plan du cercle générateur, il est aisé de voir, sans recourir à une nouvelle figure, que la vitesse absolue d'un point quelconque de la circonférence génératrice est $\sqrt{m^2+q^2}$. Cette vitesse absolue est alors évidemment la même pour tous les points de la circonférence.

15. Concevons, en second lieu, que la droite directrice du centre soit oblique au plan du cercle générateur, il en résultera une hélice oblique qui, bien qu'elle ait lieu dans la nature, n'a été encore, jusqu'ici, d'aucun usage dans les arts.

Concevons, par la directrice, un plan perpendiculaire à celui du cercle générateur et, dans ce cercle, soit mené un diamètre perpendiculaire à l'intersection des deux plans ; menons encore deux droites qui touchent le cercle générateur aux extrémités de ce diamètre. La projection du cercle, emporté le long de la directrice, en quelque point qu'on le suppose arrêté, sera constamment un cercle égal au premier et tangent à ces deux mêmes droites.

Décomposons

Décomposons le mouvement du centre en deux autres, l'un perpendiculaire au plan du cercle générateur et l'autre dirigé dans ce plan, parallèlement aux deux tangentes. Chaque point de la circonférence pourra être considéré comme étant animé de trois vitesses : savoir 1.° la vitesse m de rotation; 2.° la vitesse n de translation parallèle aux tangentes; 3.° enfin la vitesse q de translation, perpendiculaire au plan du cercle.

Soit toujours p la vitesse du point décrivant, dans le plan du cercle mobile, et soit v sa vitesse absolue dans l'espace; les deux vitesses p et q étant perpendiculaires l'une à l'autre, et se composant dans la vitesse unique v, on aura $v=\sqrt{q^2+p^2}$; mais on a (8) $p^2=m^2+n^2+2mn.\text{Cos.AS}$, donc

$$v=\sqrt{m^2+n^2+q^2+2mn.\text{Cos.AS}}.$$

Telle est l'expression générale de la vitesse absolue dans les hélices.

16. On voit, par ce qui précède, qu'il existe entre les hélices et les cycloïdes une relation très-remarquable; ou plutôt que les cycloïdes ne sont que des hélices d'une espèce particulière. Si la directrice du centre du cercle générateur est perpendiculaire au plan de ce cercle, on obtient l'hélice droite, ainsi que nous l'avons déjà observé. Si l'on donne à la directrice différens degrés d'inclinaison, on obtiendra les différentes sortes d'hélices obliques. Si enfin, en inclinant de plus en plus la directrice, on finit par la coucher dans le plan même du cercle générateur, les hélices dégénèreront en cycloïdes.

17. Aussi la formule du n.° 15 embrasse-t-elle tous les cas. Si la directrice est perpendiculaire au plan du cercle générateur, on a $n=0$ et par conséquent $v=\sqrt{m^2+q^2}$, comme nous l'avons trouvé (14) pour l'hélice droite. Si, au contraire, cette directrice est dans le plan même du cercle générateur, on a $q=0$ et par conséquent $v=\sqrt{m^2+n^2+2mn.\text{Cos.AS}}$, comme nous l'avons trouvé (8) pour la cycloïde.

18. Si la vitesse du centre du cercle générateur sur la directrice rectiligne, au lieu d'être constante, variait d'une manière quelconque, n et q seraient variables, et on déterminerait la vitesse absolue d'un

point de la circonférence, pour une époque quelconque, en substituant pour n et q, dans la formule générale, les valeurs qui répondraient à cette époque.

19. Si, au contraire, le mouvement du centre du cercle générateur était uniforme, mais curviligne, il faudrait considérer ce centre, à chaque instant, comme étant mu sur la tangente à la courbe; ce qui, déterminant la situation du point A, et conséquemment la grandeur de l'arc AS, permettrait de faire encore usage de la même formule.

20. Enfin le mouvement du centre du cercle générateur pourrait être en même temps varié et curviligne, et il est aisé de voir, d'après ce qui précède, comment, dans ce cas, on ferait usage de la formule générale (*).

21. On pourrait aussi supposer que le rayon du cercle générateur varie, pendant le mouvement, suivant une loi quelconque; ce qui

(*) Soit, en général, un cercle tournant uniformément sur lui-même; que le plan de ce cercle demeure constamment parallèle à un plan fixe, pendant que son centre est emporté d'un mouvement varié d'une manière quelconque, sur une courbe à double courbure, et proposons-nous de déterminer la grandeur et la direction de la vitesse absolue de l'un quelconque des points de la circonférence.

Soit r le rayon du cercle générateur et soit m la vitesse de rotation commune à tous les points de sa circonférence. Soit pris un point quelconque de l'espace pour origine des coordonnées rectangulaires, et soit prise pour axe des z une perpendiculaire au plan fixe auquel celui du cercle générateur est constamment parallèle. Enfin soient

$$\left.\begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix}\right\} \text{les coordonnées du centre;} \quad \left.\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right\} \text{les coordonnées du point décrivant.}$$

Supposons que les équations du mouvement du centre soient

$$f(x',y',z',t)=0\ ,\quad \varphi(x',y',z',t)=0\ ,\quad \psi(x',y',z',t)=0\ ;\quad \text{(A)}$$

en sorte que l'élimination de t, entre ces équations, conduise à celles de la directrice. On en tirera, par la différentiation,

$$\frac{dx'}{dt}=X\ ,\quad \frac{dy'}{dt}=Y\ ,\quad \frac{dz'}{dt}=Z\ ;\quad \text{(B)}$$

donnerait naissance à des espèces de spirales ou volutes planes, ou à double courbure, ou que la vitesse de rotation est elle-même variable, ou enfin que la direction du plan du cercle générateur varie dans l'espace suivant une loi connue; mais toutes ces recherches, d'ailleurs très-curieuses, ne paraissent guère susceptibles d'une utile application.

X, Y, Z, étant, ou du moins pouvant toujours devenir des fonctions de t seulement, et représentant les vitesses du centre parallèlement aux axes.

Soit θ l'angle variable que forme avec l'axe des x la projection sur le plan des xy du rayon mené au point décrivant, en sorte qu'on ait

$$\theta=\frac{m}{r}t+Const. \qquad \text{(C)}$$

on aura évidemment

$$x-x'=r\text{Cos.}\theta\,,\quad y-y'=r\text{Sin.}\theta\,,\quad z=z'\,; \qquad \text{(D)}$$

et l'élimination des variables x', y', z', t, θ, entre les sept équations (A, C, D) conduira à l'équation de la trajectoire décrite. Si au contraire on n'en élimine que x', y', z', θ, les trois équations qu'on obtiendra seront celles du mouvement du point décrivant.

Cela posé, dans les équations (D), tout, excepté r, étant variable et fonction de t, en les différentiant sous ce point de vue, elles deviendront

$$\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}=-r\frac{d\theta}{dt}\text{Sin.}\theta\,,\quad \frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}=r\frac{d\theta}{dt}\text{Cos.}\theta\,,\quad \frac{dz}{dt}=\frac{dz'}{dt}\,;$$

équations d'où on tirera, en ayant égard aux équations (B) et observant que l'équation (C) donne $r\frac{d\theta}{dt}=m$,

$$\frac{dx}{dt}=X-m\text{Sin.}\theta\,,\quad \frac{dy}{dt}=Y+m\text{Cos.}\theta\,,\quad \frac{dz}{dt}=Z.$$

Désignant donc par v la vitesse absolue du point décrivant, il viendra

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}=\sqrt{(X-m\text{Sin.}\theta)^2+(Y+m\text{Cos.}\theta)^2+Z^2}\,,$$

c'est-à-dire,

$$v=\sqrt{m^2+X^2+Y^2+Z^2+2m(Y\text{Cos.}\theta-X\text{Sin.}\theta)}.$$

Quant aux équations de la direction de cette vitesse, et conséquemment celle de

§. 5.

QUESTION. La vitesse absolue étant variable, la force centrifuge le sera-t-elle aussi ?

22. Après avoir suffisamment éclairci tout ce qui concerne la variation de la vitesse absolue, il nous reste à examiner le second principe posé par le docteur Wood, savoir : que, la vitesse absolue variant à

---

la tangente à la trajectoire, en désignant maintenant par x', y', z', non pas les coordonnées du centre, mais celles du point de contact, elles seront

$$x-x'=\frac{X-m\,\text{Sin.}\theta}{Z}(z-z')\;,\quad y-y'=\frac{Y+m\,\text{Cos.}\theta}{Z}(z-z').$$

L'axe des x, et conséquemment l'angle θ, étant arbitraire par rapport à la directrice ; substituons à cet angle un autre angle ω, dépendant de la nature de cette directrice et de la manière dont elle est parcourue par le centre du cercle générateur. Prenons, par exemple, pour cet angle ω, l'angle que forme la projection, sur le plan des xy, du rayon mené au point décrivant, avec la normale à la projection de la directrice sur le même plan. Les équations de ces deux droites étant

$$y-y'=\frac{\text{Sin.}\theta}{\text{Cos.}\theta}(x-x')\;,\quad y-y'=-\frac{dx'}{dy'}(x-x')=-\frac{X}{Y}(x-x')\;;$$

on aura

$$\text{Cos.}\omega=\frac{1-\dfrac{X.\text{Sin.}\theta}{Y.\text{Cos.}\theta}}{\sqrt{\left(1+\dfrac{X^2}{Y^2}\right)\left(1+\dfrac{\text{Sin}^2.\theta}{\text{Cos}^2.\theta}\right)}}=\frac{Y.\text{Cos.}\theta-X.\text{Sin.}\theta}{\sqrt{X^2+Y^2}}\;;$$

d'où

$$Y.\text{Cos.}\theta-X.\text{Sin.}\theta=\text{Cos.}\omega.\sqrt{X^2+Y^2}=n.\text{Cos.}\omega\;,$$

en désignant par n la vitesse estimée dans le sens du plan du cercle générateur. Substituant donc, dans la valeur de v, elle deviendra

$$v=\sqrt{m^2+n^2+Z^2+2mn.\text{Cos.}\omega}\;;$$

formule générale, de laquelle on déduira facilement tous les cas particuliers discutés dans le texte.

(*Note des éditeurs.*)

chaque point de la circonférence, la force centrifuge varie aussi. Or, la première chose à faire pour se mettre en état de décider cette question, c'est de bien déterminer le sens qu'on attache au mot *force centrifuge*.

Un grand nombre de physiciens l'emploient comme synonyme de force tangentielle ou projectile; voyez entre autres la *Physique méchanique* de *FISCHER*, sec. II, chap. XIII, §. VI, pag. 49. Mais *HUYGHENS*, *NEWTON*, *JEAN BERNOULLI*, et une foule d'autres illustres géomètres entendent, par *force centrifuge*, la force avec laquelle un point contraint de décrire une courbe, tend à s'en écarter à chaque instant suivant la direction de la normale.

Ici même, c'est-à-dire, dans le cas d'un cercle tournant autour de son centre, pendant que ce centre est emporté dans l'espace d'une manière quelconque, on peut établir une distinction qui donne lieu à considérer quatre sortes de forces centrifuges: on peut, en effet, considérer la force centrifuge ou par rapport à la trajectoire réellement décrite dans l'espace par un point de la circonférence, ou considérer cette force centrifuge par rapport à la circonférence; et, dans chaque cas, cette même force centrifuge peut être envisagée sous les deux points de vue que nous venons d'expliquer.

On aura donc ainsi à considérer 1.° la force suivant une direction tangente à la trajectoire, laquelle sera variable comme la vitesse absolue; 2.° la force suivant la direction tangente à la circonférence sur laquelle se meut le point décrivant; 3.° la force normale à la trajectoire; 4.° enfin la force normale à la circonférence, ou dirigée suivant le prolongement du rayon mené au point décrivant.

Or, de ces quatre sortes de forces centrifuges, dont les trois premières varient de grandeur suivant le point que l'on considère, il n'y aurait proprement que la dernière qui, si elle variait aussi, pourrait détruire l'équilibre entre les parties d'un cercle tournant sur son centre. Il est clair, en effet, que, si les points de la circonférence sont également poussés vers le centre par la force d'attraction qu'on suppose la même pour tous ces points, et inégalement sollicités dans le sens

opposé par la force centrifuge, qu'on suppose varier d'un point à l'autre, l'équilibre sera nécessairement détruit, et sa destruction exercera vraisemblablement une influence sensible sur les phénomènes des vents et des marées; mais si, au contraire, tous les points de la circonférence sont, en même temps, également attirés et également repoussés, l'équilibre devra nécessairement être maintenu.

Prouvons donc que, dans le cas de la cycloïde, qui paraît être celui duquel Wood s'est principalement occupé, le point A et un autre point quelconque S, s'ils cessaient d'être retenus sur la circonférence, en conservant d'ailleurs leurs vitesses acquises, s'éloigneraient également du centre dans des temps égaux.

23. Concevons, pour cela, que le point A qui, comme nous l'avons vu, est animé de la vitesse absolue $m+n$, suivant AE, parvienne en A′ au bout du temps t, nous aurons ainsi $AA'=tm+tn$. Or, dans le même temps que le point A parcourt AA′, le centre C parcourt aussi une certaine longueur CC′, laquelle est nécessairement égale à tn; si donc nous abaissons sur AA′ la perpendiculaire C′H, coupant en K le prolongement de SN, nous aurons $AH=tm$.

Nommant donc r le rayon $CA=C'H$, nous aurons $C'A'=\sqrt{r^2+t^2m^2}$.

D'un autre côté le point S, devenu libre, sera mu dans la direction SP avec une vitesse $\sqrt{m^2+n^2+2mn\text{Cos.AS}}$ et parviendra, au bout du temps t, en un point S′ du prolongement de cette droite tellement situé qu'en abaissant de ce point, sur le prolongement de SN la perpendiculaire S′I coupant en L le prolongement de CC′, on aura (12)

$$SI=tn+tm.\text{Cos.AS},$$

$$S'I=tm.\text{Sin.AS}.$$

d'où

$$RI=RS+SI=r\text{Sin.AS}+tn+tm\text{Cos.AS};$$

donc

$$C'L=KI=RI-RK=RI-CC'=r\text{Sin.AS}+tm\text{Cos.AS};$$

on a de plus, à cause de $CR=r.\text{Cos}.AS$,

$$S'L=S'I-LI=S'I-CR=tm.\text{Sin}.AS-r.\text{Cos}.AS\ ;$$

on aura donc

$$C'S'=\sqrt{\overline{C'L}^2+\overline{S'L}^2}=\sqrt{(r\text{Sin}.AS+tm.\text{Cos}.AS)^2+(tm\text{Sin}.AS-r\text{Cos}.AS)^2},$$

ou, en développant et réduisant,

$$C'S'=\sqrt{r^2+t^2m^2}=C'A'\ ;$$

ainsi, au bout du temps t, le point A et le point quelconque S, devenus libres, pendant que le cercle continuera à se mouvoir, se seront également écartés de son centre; d'où l'on voit que la force centrifuge, proprement dite, la seule qui puisse troubler l'équilibre, est la même pour tous les points de la circonférence (*).

(*) En conservant les notations et conventions de la note précédente, le centre du cercle est sollicité, à l'époque t, parallèlement aux axes par des forces qui sont respectivement

$$\frac{d^2x'}{dt^2}=\frac{dX}{dt},\quad \frac{d^2y'}{dt}=\frac{dY}{dt},\quad \frac{d^2z'}{dt}=\frac{dZ}{dt}\ ; \qquad (E)$$

et le point décrivant est sollicité, au même instant, parallèlement aux mêmes axes, par des forces qui sont

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dX}{dt}-m\frac{d\theta}{dt}\text{Cos}.\theta,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dY}{dt}-m\frac{d\theta}{dt}\text{Sin}.\theta,\quad \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{dZ}{dt}\ ;$$

mais les axes faisant, avec le rayon mené au point décrivant, des angles dont les cosinus sont respectivement,

$$\text{Cos}.\theta\ ,\quad \text{Sin}.\theta\ ,\quad o\ ;$$

les forces de la première sorte, estimées suivant ce rayon, seront

$$\frac{dX}{dt}\text{Cos}.\theta,\quad \frac{dY}{dt}\text{Sin}.\theta,\quad o\ ;$$

et les forces de la seconde sorte, estimées suivant ce même rayon, seront

$$\left\{\frac{dX}{dt}-m\frac{d\theta}{dt}\text{Cos}.\theta\right\}\text{Cos}.\theta,\quad \left\{\frac{dY}{dt}-m\frac{d\theta}{dt}\text{Sin}.\theta\right\}\text{Sin}.\theta\ ;\quad o.$$

Ainsi le rayon mené au point décrivant sera sollicité, suivant sa direction, savoir: à l'une de ses extrémités, par une force unique égale à

On voit donc que le système du docteur Wood n'est absolument pas soutenable. Son premier principe est vrai ; quand au second, il est vrai dans un sens et faux dans un autre, et c'est dans ce dernier sens qu'il en a prétendu pouvoir faire l'application à la rotation diurne de la planète que nous habitons.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 32 de ce volume ;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

Lemme I. Partager deux droites données de grandeur, l'une et l'autre en deux parties, de manière que le rectangle d'une partie de l'une de ces droites par une partie de l'autre soit donné de grandeur, et que le rectangle des deux autres parties soit aussi donné de grandeur ?

$$\frac{dX}{dt}\text{Cos.}\theta+\frac{dY}{dt}\text{Sin.}\theta,$$

et, à son autre extrémité, par une force unique égale à

$$\frac{dX}{dt}\text{Cos.}\theta+\frac{dY}{dt}\text{Sin.}\theta-m\frac{d\theta}{dt}=\frac{dX}{dt}\text{Cos.}\theta+\frac{dY}{dt}\text{Sin.}\theta-\frac{m^2}{r},$$

la force centrifuge, proprement dite, évidemment égale à la différence de ces deux-là, sera donc simplement $\frac{m^2}{r}$, c'est-à-dire, exactement la même que si le centre était fixe, et tout à fait indépendante de la situation du point décrivant sur la circonférence.

(*Note des éditeurs.*)

Soient

Soient AB, A′B′ (fig. 2) deux droites données de grandeur; on demande de couper ces droites l'une et l'autre en deux parties aux points X et X′, de manière que les rectangles $AX \times A'X'$ et $BX \times B'X'$ soient l'un et l'autre donnés de grandeur?

Soient

$$AX \times A'X' = AB \times A'a' \quad \text{et} \quad BX \times B'X' = AB \times B'b',$$

on aura

$$AX : AB = A'a' : A'X' \quad \text{et} \quad BX : AB = B'b' : B'X';$$

donc

$$BX : AB = a'X' : A'X' \quad \text{et} \quad AX : AB = b'X' : B'X';$$

donc aussi

$$a'X' : A'X' = B'b' : B'X' \quad \text{et} \quad b'X' : B'X' = A'a' : A'X';$$

ce qui donne

$$a'X' \times b'X' = A'a' \times B'b'.$$

On connaît donc la somme $a'b'$ des deux distances $a'X'$, $b'X'$ et le rectangle de ces mêmes distances; ainsi elles sont données de grandeur et conséquemment le point X′ est donné de position.

Remarque I. Pour fixer l'attention sur un cas déterminé, j'ai supposé que les positions des points donnés et des points cherchés sont respectivement AXB, A′X′B′, et que les droites $A'a'$, $B'b'$, sont données de grandeur de manière à répondre à cette supposition. Si l'on voulait faire l'énumération de toutes les positions dont ces points sont susceptibles, il paraît d'abord qu'il y aurait neuf cas à examiner; mais quelques-uns de ces cas rentreraient les uns dans les autres; ils dépendraient de la grandeur des droites données $A'a'$, $B'b'$ et des directions suivant lesquelles on les porterait depuis les points A′ et B′. La géométrie et l'algèbre indiquant la liaison qui règne entre ces différens cas, par les changemens de directions et de signes des lignes obtenues, j'ai cru devoir me borner à l'exposition sommaire de l'un de ces cas.

Remarque II. On obtient, comme il suit, la condition de possibilité du problème proposé:

$$\overline{a'b'}^2 \geqq 4\mathrm{A}'a' \times \mathrm{B}'b' ,$$

$$[\mathrm{A}'\mathrm{B}' - (\mathrm{A}'a' + \mathrm{B}'b')]^2 \geqq 4\mathrm{A}'a' \times \mathrm{B}'b' ,$$

$$\mathrm{A}'\mathrm{B}' - (\mathrm{A}'a' + \mathrm{B}'b') \geqq 2\sqrt{\mathrm{A}'a' \times \mathrm{B}'b'} ,$$

$$\mathrm{A}'\mathrm{B}' \geqq \mathrm{A}'a' + 2\sqrt{\mathrm{A}'a' \times \mathrm{B}'b'} + \mathrm{B}'b' ,$$

$$\sqrt{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} \geqq \sqrt{\mathrm{A}'a'} + \sqrt{\mathrm{B}'b'} .$$

LEMME II. Partager trois droites données de grandeur chacune en deux parties de manière que l'on connaisse de grandeur chacun des rectangles suivans : savoir, le rectangle d'une partie de la première par une partie de la seconde ; le rectangle de l'autre partie de la seconde par une partie de la troisième ; enfin le rectangle de l'autre partie de la troisième par l'autre partie de la première ?

Je vais montrer comment le problème proposé, sur trois droites, peut être ramené au problème correspondant sur deux droites seulement.

Soient AB, A'B', A''B'' (fig. 3), trois droites données de grandeur, à couper en X, X', X'', de manière que l'on connaisse de grandeur chacun des rectangles $\mathrm{AX} \times \mathrm{A}'\mathrm{X}'$, $\mathrm{B}'\mathrm{X}' \times \mathrm{A}''\mathrm{X}''$, $\mathrm{B}''\mathrm{X}'' \times \mathrm{BX}$?

Soient

$$\mathrm{AX} \times \mathrm{A}'\mathrm{X}' = \mathrm{A}'\mathrm{B}' \times \mathrm{A}a \quad \text{et} \quad \mathrm{B}'\mathrm{X}' \times \mathrm{A}''\mathrm{X}'' = \mathrm{A}'\mathrm{B}' \times \mathrm{A}''a'' ,$$

on aura

$$\mathrm{AX} : \mathrm{A}a = \mathrm{A}'\mathrm{B}' : \mathrm{A}'\mathrm{X}' \quad \text{et} \quad \mathrm{A}'\mathrm{B}' : \mathrm{B}'\mathrm{X}' = \mathrm{A}''\mathrm{X}'' : \mathrm{A}''a'' ,$$

donc

$$\mathrm{AX} : a\mathrm{X} = \mathrm{A}'\mathrm{B}' : \mathrm{B}'\mathrm{X}' \quad \text{et} \quad \mathrm{A}'\mathrm{B}' : \mathrm{A}'\mathrm{X}' = \mathrm{A}''\mathrm{X}'' : a''\mathrm{X}'' ,$$

et par conséquent

$$\mathrm{AX} : a\mathrm{X} = \mathrm{A}''\mathrm{X}'' : \mathrm{A}''a'' \quad \text{et} \quad \mathrm{AX} : \mathrm{A}a = \mathrm{A}''\mathrm{X}'' : a''\mathrm{X}'' ,$$

d'où résulte

$$a\mathrm{X} : \mathrm{A}a = \mathrm{A}''a'' : a''\mathrm{X}'' ,$$

ou $$aX\times a''X''=Aa\times A''a''.$$

Donc on connaît les droites aB, $a''B''$, et en outre les rectangles $aX\times a''X''$, $BX\times B''X''$ sont donnés de grandeur; donc le problème sur trois droites données de grandeur et sur trois rectangles formés par leurs parties, d'une manière conforme à l'énoncé, est ramené au problème correspondant sur deux droites seulement.

Remarque. On ramenera précisément de la même manière le problème proposé sur quatre droites, au problème correspondant sur trois droites; et généralement, le problème étant proposé sur un certain nombre de droites, on le ramenera au problème correspondant sur un nombre de droites inférieur d'une unité.

Problème. A un triangle donné, inscrire un triangle dont les côtés passent par des points donnés?

Soient A, A', A'', les sommets d'un triangle donné; soient P, P', P'', trois points donnés sur le plan de ce triangle. On demande d'inscrire au triangle donné, un triangle $XX'X''$, dont les côtés XX', $X'X''$, $X''X$, passent respectivement par les points P'', P, P'?

$$\text{Par}\left\{\begin{matrix}P\\P'\\P''\end{matrix}\right\}\text{soient menées aux côtés}\left\{\begin{matrix}AA',AA''\\A'A'',A'A\\A''A,A''A'\end{matrix}\right\}\text{les parallèles}\left\{\begin{matrix}Pa',Pb'',\\P'a'',P'b,\\P''a,P''b'.\end{matrix}\right.$$

$$\text{Les rectangles}\left\{\begin{matrix}aX\times b'X, & a''X''\times bX, & a'X'\times b''X'',\\ aA''\times b'A''; & a''A'\times bA', & a'A\times b''A;\end{matrix}\right.$$

sont égaux deux à deux; ainsi ceux de la première ligne sont donnés de grandeur; et, comme on connaît en outre les distances ab, $a'b'$, $a''b''$, le problème se trouve ramené au *lemme* précédent.

Remarque. A l'aide de l'extension dont on a vu tout à l'heure que ce *lemme* est susceptible, on résoudra d'une manière semblable le problème général. *A un poligone donné, inscrire un poligone de même nom, dont les côtés (ou leurs prolongemens) passent respectivement par des points (en même nombre) donnés de position?*

Autre solution du même problème;

Par M. Servois, professeur de mathématiques aux écoles d'artillerie de Lafère.



1.° Si l'on construit une suite de poligones de m côtés dont les côtés ou leurs prolongemens passent respectivement par m points donnés et dont les sommets, excepté le dernier, soient respectivement sur $m-1$ droites données, le lieu des derniers sommets de ces polygones sera en général une courbe du second degré (Voyez, pour la démonstration de cette proposition, la *Correspondance sur l'école polytechnique*, tome 1.er, n.° 8, page 309). A quoi il faut ajouter qu'avec la règle seulement il sera facile de déterminer cinq ou un plus grand nombre de points de la courbe.

2.° Si donc le dernier sommet est assujetti, comme les autres, à se trouver sur une droite donnée ou, ce qui revient au même, s'il s'agit d'*inscrire à un polygone donné de* m *côtés un polygone d'un pareil nombre de côtés, dont les côtés, ou leurs prolongemens, passent par* m *points donnés*, l'un quelconque des sommets du polygone cherché devra se trouver à l'intersection du côté correspondant du polygone donné avec une courbe du second degré dont cinq points au moins seront déterminés; d'où l'on voit que le problème ne pourra admettre que deux solutions au plus.

3.° On voit, en outre, que la résolution de ce problème se trouvera réduite à celle du problème suivant : *cinq points étant donnés de position par rapport à une droite indéfinie, construire les intersections de cette droite avec la courbe du second degré passant par les cinq points donnés?* Or ce problème a été résolu (Voyez la *Corres-*

pondance sur l'école polytechnique, tome 1.er, n.o 10, page 435); et il peut l'être facilement de diverses autres manières.

4.o Dans des cas particuliers, il peut arriver que, par la nature du polygone donné et la situation des points donnés, l'un des sommets du polygone cherché cessant d'être assujetti à se trouver sur un côté du premier, ce sommet décrive une ligne droite; alors le problème rentre en totalité dans le domaine de la *géométrie de la règle*. Ces cas sont en très-grand nombre dans le problème général; car seulement le problème particulier du triangle présente celui des trois pôles en ligne droite, celui de deux pôles en ligne droite avec un sommet, etc.



Solution du dernier des deux problèmes proposés à la page 32 de ce volume;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

Problème. Déterminer un quadrilatère dont on connaît les quatre côtés et la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés?

Je remarque d'abord que ce problème donne lieu à un cas indéterminé. En effet, lorsque les côtés opposés d'un quadrilatère sont égaux, deux à deux, le quadrilatère est un parallélogramme; la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés est déterminée à être égale et parallèle à chacun des deux autres côtés, et le nombre des quadrilatères assujettis aux conditions données est illimité.

Supposons donc que la double égalité qui rend le problème indéterminé n'ait pas lieu.

Soit AA′CC′ (fig. 5) un quadrilatère dont les côtés sont donnés de grandeur de manière qu'on n'ait pas, en même temps, AA′=CC′ et AC=A′C′; que les côtés opposés AC et A′C′ soient coupés

en deux parties égales, en B et B′, et que la droite BB′ soit donnée de grandeur; on demande le quadrilatère.

L'application des propositions générales de la Polygonométrie m'a paru le moyen le plus convenable pour résoudre le problème proposé : savoir, je vais chercher, au moyen de ces propositions, les angles en B et en B′ que la droite BB′ fait avec les côtés du quadrilatère dont elle joint les milieux.

Que dans le quadrilatère ABB′A′ les angles extérieurs soient désignés par B et par B′; dans le quadrilatère CBB′C′ les angles extérieurs seront les supplémens des premiers.

Dans le quadrilatère ABB′A′, on a l'équation

$$\begin{aligned} AA'^2 = AB^2 + BB'^2 + B'A'^2 &+ 2AB \times BB' \times Cos.B\ , \\ &+ 2AB \times B'A' \times Cos.(B+B')\ , \\ &+ 2BB' \times B'A' \times Cos.B'. \end{aligned}$$

Dans le quadrilatère CBB′C′, en remarquant que BC=AB et que B′C′=A′B′, on a l'équation

$$\begin{aligned} CC'^2 = AB^2 + BB'^2 + B'A'^2 &- 2AB \times BB' \times Cos.B\ , \\ &+ 2AB \times B'A' \times Cos.(B+B')\ , \\ &- 2BB' \times B'A' \times Cos.B'. \end{aligned}$$

Ajoutant et retranchant successivement la seconde équation à la première, il viendra, en réduisant,

$$AA'^2 + CC'^2 = 2AB^2 + 2BB'^2 + 2B'A'^2 + 4AB \times B'A' \times Cos.(B+B').$$

$$AA'^2 - CC'^2 = 4AB \times BB' \times Cos.B + 4BB' \times B'A' \times Cos.B'.$$

Ce qui donne

$$Cos.(B+B') = \frac{AA'^2 + CC'^2 - 2(AB^2 + BB'^2 + B'A'^2)}{4AB \times B'A'}\ ,$$

$$AB.Cos.B + A'B'.Cos.B' = \frac{\frac{AA'+CC'}{2} \times \frac{AA'-CC'}{2}}{BB'}.$$

Par la première de ces équations, on connait la somme des angles

B et B′, par le cosinus de cette somme; par la seconde on connaît la somme des produits des cosinus des mêmes angles par les droites données AB et A′B′. Partant, le problème est ramené à cet autre : trouver deux angles dont on connaît la somme, et la somme des produits de leurs cosinus par des droites données.

Remarque I. Lorsque AA′=CC′ et AB=A′B′, on a aussi BB′=AA′=CC′; il vient conséquemment

$$Cos.(B+B')=-1\,;$$

donc la somme des angles B et B′ vaut deux droites, et conséquemment les droites AC et A′C′ sont parallèles entre elles. Alors $Cos.B'=-Cos.B$, et la seconde équation devient

$$(AB-A'B')Cos.B=AA'-CC'\,;$$

d'où $Cos.B=\frac{0}{0}$; partant, l'angle B est indéterminé, comme il doit l'être en effet.

Remarque II. Le problème : couper un angle donné en deux parties telles que la somme des produits de leurs cosinus par des droites données soit donnée de grandeur, peut être résolu de différentes manières, soit par l'algèbre soit par la géométrie. Le procédé suivant, fondé sur la doctrine des centres des moyennes distances, me paraît l'un des plus élégans.

Soit ACA′ (fig. 6) un angle donné, on demande de le partager en deux parties ACX, A′CX, par une droite CX, de manière que les sommes de leurs cosinus, pour les rayons donnés de grandeur CA et CA′, soient égales à une droite donnée de grandeur $2a$?

Soit menée AA′, laquelle soit coupée en deux parties égales, au point Z; de ce point, comme centre, et avec un rayon égal à la moitié a de la droite donnée, soit décrite une circonférence de cercle; du sommet C soit menée (s'il est possible) une tangente à ce cercle, et du point C soit élevée à cette tangente une perpendiculaire CX; cette perpendiculaire sera la droite qui divisera l'angle proposé dans les parties cherchées.

Pour que le problème soit possible, le point C ne doit pas être au

dedans de la circonférence dont Z est le centre et dont a est le rayon, c'est-à-dire, qu'on doit avoir $a \stackrel{=}{<} CZ$. Or,

$$CA^2+CA'^2=2CZ^2=2AZ^2=2CZ^2+\tfrac{1}{2}AA'^2$$

$$=2CZ^2+\frac{CA^2+CA'^2-2CA\times CA'.\mathit{Cos}.C}{2};$$

donc

$$2CZ^2=\frac{CA^2+CA'^2+2CA\times CA'.\mathit{Cos}.C}{2},$$

et

$$CZ^2=\frac{CA^2+CA'^2+2CA\times CA.\mathit{Cos}.C}{4};$$

on doit donc avoir

$$4a^2 \stackrel{=}{<} CA^2+2CA\times CA'.\mathit{Cos}.C+CA'^2.$$

Dans le cas présent, cette inégalité devient

$$\left\{\frac{\frac{1}{2}(AA'+CC').\frac{1}{2}(AA'-CC')}{BB'}\right\}^2 \stackrel{=}{<} AB^2+A'B'^2+2AB\times A'B' \times\frac{AA'^2+CC'^2-2(AB^2+BB'^2+A'B'^2)}{4AB\times A'B'},$$

$$\stackrel{=}{<} AB^2+A'B'^2+\frac{AA'^2+CC'^2-2(AB^2+BB'^2+AB'^2)}{2},$$

$$\stackrel{=}{<} \frac{AA'^2+CC'^2}{2}-BB'^2.$$

De là on tire $\left\{\begin{array}{l} BB' \stackrel{=}{>} \frac{1}{2}(AA'-CC'), \\ BB' \stackrel{=}{<} \frac{1}{2}(AA'+SC'); \end{array}\right.$

savoir ; *Dans tout quadrilatère, la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés n'est pas plus petite que la demi-différence des deux autres côtés, et elle n'est pas plus grande que leur demi-somme.*

Remarque

Remarque III. L'équation

$$AB.Cos.B+A'B'.Cos.B'=\frac{\frac{1}{2}(AA'+CC')\times\frac{1}{2}(AA'-CC')}{BB'},$$

donne lieu à la construction suivante :

Des points A et A' soient abaissées sur BB' les perpendiculaires Ab et $A'b'$; on aura

$$Bb=AB.Cos.B\ , \qquad B'b'=A'B'.Cos.B'\ ;$$

donc

$$bb'=BB'+AB.Cos.B+A'B'.Cos.=\frac{\frac{1}{2}(AA'+CC')\times\frac{1}{2}(AA'-CC')}{BB'}+BB'.$$

Or, le rapport de AA' à bb' est le rapport du sinus total au cosinus de l'inclinaison du côté BB' au côté AA'; donc on connaît cette inclinaison ; et, par la première équation, on connaît celle des deux côtés AC et A'C' l'un à l'autre.

Remarque IV. De là le problème proposé est ramené au suivant : soient deux cercles donnés de grandeur et de position, et soit une droite donnée de position ; mener une droite parallèle à la droite donnée de position, de manière que sa partie comprise entre les circonférences des deux cercles soit de grandeur donnée.

En effet, les points B et B' sont à des circonférences données, dont les centres sont A et A', et dont les rayons sont AB et A'B'; et la droite BB', donnée de grandeur, doit être inscrite entre les circonférences de ces cercles, de manière qu'elle fasse un angle donné avec la droite AA' qui joint leurs centres.

Par le centre A soit menée une droite Aα, égale à BB' et faisant avec AA' l'angle donné. Du point α comme centre, avec le rayon AB, soit décrite une circonférence de cercle qui rencontre (s'il est possible) en B' la circonférence dont A' est le centre et A'B' le rayon ; soit enfin menée B'B parallèle à Aα, et terminée en B à la circonférence de l'autre cercle ; la droite B'B sera la position de la droite qui joint les milieux des côtés opposés AC et A' C'.

Si la circonférence décrite du centre α avec le rayon AB, coupe la circonférenee décrite avec le rayon A'B' et le centre A', le problème proposé a deux solutions.

Si la rencontre de ces circonférences n'a pas lieu, le problème est impossible.

Si enfin la rencontre se fait par contact, il y a une limite entre les quantités données.

Pour que le problème soit possible, on doit avoir les deux conditions

$$\left.\begin{array}{l} 1.^{\circ}\ AB \geqq A'\alpha - A'B' \\ 2.^{\circ}\ AB \leqq A'\alpha + A'B' \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} A'\alpha \leqq AB + A'B' \\ A'\alpha \geqq AB - A'B' \end{array}\right\} \text{ donc } \left\{\begin{array}{l} A'\alpha^2 \leqq (AB + A'B')^2\ ; \\ A'\alpha^2 \geqq (AB - A'B')^2\ ; \end{array}\right.$$

or,

$$\begin{aligned} A'\alpha^2 &= AA'^2 + A\alpha^2 - 2AA' \times A\alpha . Cos . A'A\alpha \\ &= AA'^2 + A\alpha^2 - 2BB' \times bb' \\ &= AA'^2 + BB'^2 - 2BB' \times bb' \\ &= AA'^2 + BB'^2 - 2BB'\left\{BB' + \frac{\frac{1}{2}(AA' + CC') \times \frac{1}{2}(AA' - CC)}{BB'}\right\} \\ &= AA'^2 - BB'^2 - \tfrac{1}{2}(AA'^2 - CC'^2) \\ &= \tfrac{1}{2}(AA'^2 + CC'^2) - BB'^2\ ; \end{aligned}$$

on a donc les deux limites

$$\left.\begin{array}{l} (AB + A'B')^2 \geqq \\ (AB - A'B')^2 \leqq \end{array}\right\} \tfrac{1}{2}(AA'^2 + CC'^2) - BB'^2 .$$

Autre solution. Le problème proposé peut aussi être résolu, indépendamment des propositions générales de la polygonométrie, comme il suit.

Que les côtés AC, A'C' se rencontrent (s'il y a lieu) en S, (fig. 7) on aura

$$\begin{aligned} CC'^2 &= CS^2 + C'S^2 - 2CS \times C'S . Cos . S\ , \\ &= (BS - BC)^2 + (B'S - B'C')^2 - 2(BS - BC)(B'S - B'C') . Cos . S\ , \\ &= BB'^2 - 2BS \times BC + 2BS \times B'C' . Cos . S + BC^2 + B'C'^2 - 2BC \times B'C' . Cos . S . \\ &\quad - 2B'S \times B'C' + 2B'S \times BC . Cos . S . \end{aligned}$$

On trouvera par un calcul à peu près semblable,

$$\begin{aligned} AA'^2 = BB'^2 + 2BS \times BC - 2BS \times B'C' . Cos . S + BC^2 + B'C'^2 - 2BC \times B'C' . Cos . S . \\ + 2B'S \times B'C' - 2B'S \times BC . Cos . S . \end{aligned}$$

de là

$$\begin{aligned} AA'^2 + CC'^2 &= 2BB'^2 + 2BC^2 + 2B'C'^2 - 4BC \times B'C' . Cos . S\ , \\ AA'^2 - CC'^2 &= 4BS \times BC - 4BS \times B'C' . Cos . S\ , \\ &\quad + 4B'S \times B'C' - 4B'S \times BC . Cos . S . \end{aligned}$$

La premiére des ces équations donne

$$Cos.S=\frac{2(BB'^2+BC^2+B'C'^2)-(AA'^2+CC'^2)}{AC\times A'C'};$$

et de la seconde on tire

$$4BS(BC-B'C'.Cos.S)+4B'S(B'C'-BC.Cos.S)=AA'^2-CC'^2.$$

Partant, dans le triangle BSB', on connaît la base BB', l'angle S au sommet, et la somme $AA'^2-CC'^2$ des rectangles des deux côtés BS et B'S' par les quantités données $BC-B'C'.Cos.S$ et $B'C'-BC.Cos.S$; lesquelles quantités données reviennent respectivement à

$$\frac{AA'^2+CC'^2-2BB'^2+2BC^2-2B'C'^2}{4BC},\quad\frac{AA'^2+CC'^2-2BB'^2-2BC^2+2B'C'^2}{4B'C'}.$$

Ainsi, le problème proposé, sur le quadrilatère, est ramené au problème suivant, sur un triangle : on demande un triangle BSB' dont on connaît la base BB', l'angle au sommet S, et la somme des rectangles des côtés BS et B'S par des droites données ?

Solution analitique du même problème ;

Par M. Rochat, professeur de mathématiques et de navigation à St-Brieux.

Soit le quadrilatère BCDE (fig. 8), dont les milieux des côtés BC et DE sont respectivement A et K, et dans lequel on connaît $AK=a$, $BC=b$, $DE=c$, $CE=d$, $BD=e$. Soient pris AK pour axe des x, et le point A pour origine ; et soient les coordonnées des sommets ainsi qu'il suit :

$$\text{pour B}\begin{cases}+m,\\+n;\end{cases}\quad\text{pour C}\begin{cases}-m,\\-n;\end{cases}\quad\text{pour D}\begin{cases}a-p,\\+q;\end{cases}\quad\text{pour E}\begin{cases}a+p,\\-q;\end{cases}$$

les coordonnées des milieux respectifs G, H de BD, CE seront

$$\text{pour G}\begin{cases}\frac{1}{2}(a-p+m),\\\frac{1}{2}(q+n);\end{cases}\quad\text{pour H}\begin{cases}\frac{1}{2}(a+p-m),\\-\frac{1}{2}(q+n);\end{cases}$$

soit fait enfin $GH=Z$; on aura les équations de condition

$$4(m^2+n^2)=b^2\ ,\quad (a-p-m)^2+(q-n)^2=e\ ,$$
$$(p-m)^2+(q+n)^2=Z^2.$$
$$4(p^2+q^2)=c^2\ ,\quad (a+p+m)^2+(q-n)^2=d\ ,$$

En traitant $p+m$ et $q-n$ comme inconnues dans celles de la seconde colonne, et quarrant il viendra

$$(p+m)^2=\left\{\frac{d^2-e^2}{4a}\right\}^2,\qquad (q-n)^2=\frac{8a^2(d^2+e^2-2a^2)-(d^2-e^2)^2}{16a^2}\ ;$$

ajoutant ces équations à l'équation en Z, il viendra, en doublant et retranchant les équations de la première colonne,

$$2Z^2+d^2+e^2=2a^2+b^2+c^2\ ;$$

au moyen de quoi Z peut être regardé comme connu.

Cela posé, les coordonnées des points M et P, milieux respectifs des diagonales BE et CD, sont

$$\text{pour M}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}(a+p+m)\ ,\\ -\frac{1}{2}(q-n)\ ;\end{array}\right.\qquad \text{pour P}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}(a-p-m)\ ,\\ \frac{1}{2}(q-n)\ ;\end{array}\right.$$

d'où il suit que la droite PM, passant par l'intersection O des droites AK et GH, aura pour équation

$$y+\tfrac{1}{2}(q-n)=-\frac{q-n}{p+m}\left\{x-\tfrac{1}{2}(a+p+m)\right\}\ ;$$

ainsi AK forme avec PM un angle dont la tangente tabulaire est

$$-\frac{p-n}{q+m}=-\frac{\sqrt{8a^2(d^2+e^2-2a^2)-(d^2-e^2)^2}}{d^2-e^2}\ ;$$

on trouvera de même que GH forme avec la même droite un angle dont la tangente est

$$-\frac{\sqrt{8z^2(b^2+c^2-2z^2)-(b^2-c^2)^2}}{b^2-c^2}\ ;$$

l'angle formé par les droites AK et GH; angle qui est la somme ou la différence de ces deux-là, pourra donc être déterminé; et, comme les grandeurs de ces droites sont connues, et que d'ailleurs leur intersection O est leur milieu commun, on aura tout ce qui sera nécessaire pour construire le quadrilatère demandé.

Cette analise s'applique également aux trois sortes de quadrilatères, et

les limites du problème sont données par celles de la réalité du radical (*).

Construction géométrique du même problème ;

Par M. PILATTE, professeur de mathématiques spéciales au lycée d'Angers.

PROBLÈME. *Construire un quadrilatère dans lequel on connaît les quatre côtés et la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés ?*

Solution. Supposons que ce quadrilatère soit déjà construit et que ce soit le quadrilatère ABCD (fig. 9) dans lequel, outre les quatre côtés, on connaît la droite EF qui joint les milieux E, F des côtés opposés AB, CD. Soient I, K les milieux des deux autres côtés BC, AD; soient menées les diagonales AC, BD, dont les milieux soient H, G; en exécutant les constructions indiquées dans la figure, on aura (**) $EH=GF=\frac{1}{2}AD$, $HF=EG=\frac{1}{2}BC$, $KH=GI=\frac{1}{2}AB$, $KG=HI=\frac{1}{2}DC$; le parallélogramme EHFG, dans lequel on connaît, outre les côtés, la diagonale EF, peut donc être construit ; sa construction fera connaître sa diagonale HG, laquelle est aussi diagonale du parallélogramme HKGI dont on connaît, en outre, les côtés ; ce dernier parallélogramme peut donc aussi être construit, et conséquemment les points I et K peuvent être déterminés ; menant donc par E, F, I, K, des droites respectivement parallèles à GI, GK, HF, GF, ces droites, par leur rencontre, formeront le quadrilatère demandé.

Le parallélogramme HKGI, tournant autour de celle HG de ses

(*) On parvient encore assez facilement au but, en prenant l'un des côtés opposés du quadrilatère dont la distance des milieux est donnée pour axe des x ; son milieu pour origine ; et en cherchant à déterminer la situation du milieu du côté opposé. Ce milieu est donné par l'intersection d'un cercle ayant son centre à l'origine avec une parabole ayant pour axe l'axe des x ; ce qui conduit, par l'élimination, à une équation du quatrième degré se résolvant à la manière du second.

(**) Voyez les pag. 313 et 353 du tom. 1.er des *Annales*.

(*Notes des éditeurs.*)

deux diogonales qui lui est commune avec le parallélogramme EHFG, peut prendre, par rapport à ce dernier, la situation HK′GI′; et, si l'on construit sur celui-ci, comme sur le premier, on formera un nouveau quadrilatère A′B′C′D′ qui, sans être égal au premier, remplira comme lui les conditions du problème.

Quant à l'impossibilité de ce problème, elle se manifestera par celle de la construction de l'un ou de l'autre des parallélogrammes EHFG et HKGI.

Démonstrations du théorème énoncé à la page 32 de ce volume.

Par MM. Raymond, Vecten, Lhuilier, Encontre, Labrousse, Ferriot, Rochat, Fauquier et Ajasson.

Quelques-uns des géomètres qui se sont occupés de ce théorème, en ont donné, à la fois, des démonstrations analitiques et des démonstrations synthétiques; d'autres se sont bornés à une démonstration de l'une ou de l'autre sorte; enfin deux en ont donné des démonstrations mixtes, c'est-à-dire, partie analitique et partie synthétique.

M. *Raymond*, principal du collége de Chambery, a donné deux démonstrations purement analitiques; et MM. *Vecten*, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Nismes, *Rochat*, professeur de navigation à St.-Brieux, et *Ajasson*, élève du lycée d'Angers, en ont chacun donné une. Ces diverses démonstrations reviennent à peu près à ce qui suit.

L'équation d'une hyperbole équilatérale, rapportée à ses asymptotes prises pour axes, est de la forme

$$xy=A^2;$$

et, si α et β sont les coordonnées de l'une des extrémités d'un diamètre, $-\alpha$ et $-\beta$ seront les coordonnées de son autre extrémité; en sorte que, si par un point dont les coordonnées sont x et y, on mène des

droites à ces deux-là, en désignant par m et m' les tangentes tabulaires des angles que feront ces droites, d'un même côté, avec l'asymptote prise pour axe des x, on aura

$$m=\frac{y-\beta}{x-\alpha}, \quad m'=\frac{y+\beta}{x+\alpha}.$$

Mais comme on a

$$xy=A^2, \quad \alpha\beta=A^2,$$

on a aussi

$$xy=\alpha\beta \quad \text{d'où} \quad y=\frac{\alpha\beta}{x};$$

donc

$$m=-\frac{\beta}{x}, \quad m'=+\frac{\beta}{x};$$

et par conséquent

$$m'=-m;$$

les angles formés d'un même côté avec l'asymptote par les deux droites, sont donc supplémens l'un de l'autre; ces deux angles, pris de différens côtés, sont donc égaux.

Ainsi, *Les droites qui vont d'un même point quelconque d'une hyperbole équilatérale aux deux extrémités d'un même diamètre transverse, sont également inclinées à l'une quelconque des asymptotes.*

Passons actuellement aux démonstrations synthétiques. M. *Raymond* a déduit la sienne de ces deux propositions connues.

1.° Dans l'ellipse et dans l'hyperbole, les deux cordes supplémentaires qui répondent à un même diamètre, indiquent, par leur direction, un système de diamètres conjugués.

2.° Dans toute hyperbole, le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués quelconques, a ses diagonales dirigées suivant les asymptotes.

Il est évident en effet, par la première proposition, que les droites qui vont d'un point quelconque d'une hyperbole aux deux extrémités d'un même diamètre transverse, sont parallèles à deux autres diamètres conjugués l'un à l'autre; ces droites sont donc, en vertu de la seconde proposition, parallèles aux droites qui joignent les milieux des côtés opposés d'un certain parallélogramme dont les diagonales se confondent

avec les asymptotes de l'hyperbole; si donc cette hyperbole est équilatérale, ce parallélogramme ayant ses diagonales rectangulaires devient un rhombe; les droites qui joignent les milieux de ses côtés opposés sont donc également inclinées à une quelconque des diagonales, c'est-à-dire, à une même asymptote; il en doit donc être de même de deux parallèles à ces droites.

Quoique la première des deux propositions sur lesquelles M. *Raymond* a fondé sa démonstration se trouve démontrée dans divers ouvrages élémentaires, on verra sans doute ici avec plaisir la démonstration très-simple qu'il en donne lui-même, et qui peut également être appliquée à l'ellipse.

Soient HBK (fig. 10) l'une des branches d'une hyperbole, C son centre, AB l'un quelconque de ses diamètres transverses, MA et MB des droites menées aux deux extrémités de ce diamètre, d'un point quelconque de la courbe; si, par le centre C, on mène des parallèles à MA et MB, coupant ces droites en E et D; parce que C est le milieu de AB, E sera le milieu de MB; le diamètre CE coupera donc en deux parties égales toutes les cordes parallèles à MB; son conjugué sera donc parallèle à cette corde, et sera par conséquent CD.

Voici présentement la démonstration de M. *Lhuilier*.

« Soit C le centre d'une hyperbole équilatère (fig. 11). Soit ACA' » un diamètre transverse de cette hyperbole, dont les extrémités soient » A et A'. Soit M un point de cette hyperbole auquel soient menées » les droites AM, A'M. Par M soit menée une droite parallèle à l'une » des asymptotes; et, sur cette droite, soient abaissées les perpendi- » culaires AB, A'B'. J'affirme que les angles AMB, A'MB' sont » égaux entre eux.

» Soit, en effet, menée par C l'autre asymptote, qui rencontre en » P la droite BB'; et, sur CP, soient abaissées les perpendiculaires » AD, A'D'.

» On a, par la propriété fondamentale de l'hyperbole rapportée à » ses asymptotes,

$$AD \times CD = MP \times CP, \text{ ou } AD : MP = CP : CD;$$

de là

» de là

$$AD-MP : AD+MP = CP-CD : CP+CD,$$

» ou, à cause de $AD=A'D'=B'P$, et de $CD=CD'$

$$MB : MB' = AB : A'B' ;$$

» les deux triangles rectangles MBA et MB'A' sont donc semblables
» entre eux; et, par suite, les angles AMB et A'MB' sont égaux
» entre eux.

» *Application.* Soient deux points A, A' donnés de position, et
» soit une droite BB' qui se meut parallèlement à elle-même dans un même
» plan passant par ces deux points. Dans chacune des positions de cette
» droite, soit déterminé, sur elle, le point M dont la somme des
» distances aux points A, A' est la plus petite; le lieu de ce point
» M est une hyperbole équilatère dont AA' est un diamètre trans-
» verse, et dont une asymptote est parallèle à BB'.

» Ce point est aussi le point d'incidence des rayons qui, partant de l'un
» des points A, A', sont réfléchis à l'autre point, par la droite BB'. »

La démonstration de M. *Encontre*, Professeur doyen de la faculté des sciences de l'académie de Montpellier, suppose, outre le premier des deux principes employés par M. *Raymond*, les deux autres principes que voici ; 1.° la tangente à l'hyperbole, terminée aux asymptotes, a son point de contact à son milieu ; et elle est égale au conjugué du diamètre mené par ce point de contact ; 2.° deux diamètres conjugués quelconques d'une hyperbole équilatérale sont égaux entre eux.

Ces principes posés, soient C (fig. 12) le centre d'une hyperbole équilatérale, AA' un diamètre, MA, MA' des droites joignant un point quelconque M de la courbe aux extrémités de ce diamètre, et supposons que ces droites coupent l'une des asymptotes en B et D. Soit EF une tangente parallèle à MA, soient E le point de contact de cette tangente et F le point où elle coupe l'asymptote ; en menant le diamètre EE' il aura pour conjugué le diamètre parallèle à EF ou MA ; ce diamètre EE' sera donc, par la propriété des cordes supplémentaires, parallèle à MA' ; les deux triangles CEF et DMB seront donc semblables ; mais, si l'hyperbole est équilatérale, on a

EC=EF, et conséquemment le premier de ces deux triangles est isocèle; le second doit donc l'être aussi; on doit donc avoir Ang.MBD=Ang. MDB.

M. *Encontre* remarque de plus que, si l'on désigne par G et H les points où MA' et MA remontrent l'autre asymptote, on aura, par ce qui précède et par les propriétés générales de l'hyperbole,

$$MB=MD,$$
$$MH=MG,$$
$$AB=MH;$$

retranchant la dernière équation de la somme des deux premières, il vient, en réduisant,

$$MA=DG.$$

Les démonstrations synthétiques de MM. *Vecten*, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Nismes, et *Labrousse*, maître de mathématiques dans la même ville, sont absolument les mêmes et reposent uniquement sur l'égalité des portions de sécantes interceptées entre les asymptotes et la courbe; elles reviennent à peu près à ce qui suit.

Soient toujours C (fig. 13) le centre de la courbe, BE et CH les asymptotes, AA' un diamètre, MA, MA' deux droites joignant ses extrémités à un point quelconque M de l'hyperbole; la première de ces droites coupant les asymptotes en B et H, et la seconde en D et G.

Soit menée par A' une parallèle à MA terminée en E à l'asymptote, et soit joint EH; à cause de l'égalité des triangles CAB et CA'E, et de MH=AB, HE sera parallèle à MA', et conséquemment les triangles EHB et DMB seront semblables; mais, parce que HC perpendiculaire à BE tombe sur son milieu, le premier de ces deux triangles est isocèle; le dernier l'est donc aussi; on a donc Ang.MBD =Ang.MDB.

La démonstration donnée par M. *Ferriot*, principal du collége de Baume, est d'une forme particulière; il démontre d'abord, comme

il suit, que la proposition est vraie, dans le cas où le diamètre dont il s'agit est l'axe transverse lui-même.

Soient C (fig. 14) le centre de l'hyperbole, CD son asymptote, AA′ son axe transverse, prolongé vers X, MA et MA′ les droites joignant les extrémités de cet axe à un point quelconque M de la courbe, ces droites coupant l'asymptote en D et E; soit enfin AF une perpendiculaire à l'axe, coupant l'asymptote en F.

Dans l'hyperbole équilatérale, deux diamètres conjugués, et conséquemment deux cordes supplémentaires, terminées au premier axe, font d'un même côté avec cet axe des angles complément l'un de l'autre; ainsi MA′C est complément de MAX, et, comme FAD l'est aussi, il en résulte que ces deux angles sont égaux; mais, d'un autre côté, les angles A′CE et AFD valent l'un et l'autre un angle droit et demi; donc les triangles A′CE et AFD sont semblables. On a donc Ang.MDE=Ang.CEA=Ang.MED.

Cela posé, soit un plan arbitraire passant par CD, et soit projetée la figure sur ce plan; sa projection sera toujours une hyperbole équilatérale, ayant encore CD pour asymptote, mais dont la projection de AA′ ne sera plus l'axe, mais un diamètre transverse, lequel pourra être quelconque, à cause de l'indétermination du plan conduit par CD; d'un autre côté, à cause de la situation arbitraire du point M, les projections de MA et MA′ pourront, dans la nouvelle hyperbole, devenir des droites joignant un point quelconque de la courbe aux deux extrémités d'un diamètre transverse quelconque; et, comme les projections des angles égaux MDE et MED seront encore des angles égaux, il en résulte que la proposition aura encore lieu dans ce cas.

La démonstration mixte de M. *Vecten*, et celle de M. *Fauquier* élève du lycée de Nismes, consistent également à prouver d'abord, par l'analise, que les droites qui vont d'un point quelconque d'une hyperbole équilatérale aux deux extrémités d'un même diamètre transverse font, d'un même côté, avec le premier axe, des angles complément l'un de l'autre; ce qui est évident, d'après ce qui précède, puisque ces droites sont respectivement parallèles à deux diamètres conjugués.

Cette proposition une fois établie, la proposition principale s'en déduit facilement.

Soient, en effet, C (fig. 15) le centre d'une hyperbole équilatérale, XX' la direction de son premier axe, YY' celle du second, CD et CG ses deux asymptotes, AA' un diamètre transverse quelconque, MA et MA' des droites joignant les extrémités de ce diamètre à un point quelconque M de la courbe, F et F' les points où ces droites coupent le premier axe; soient enfin B et H les intersections de MA avec les asymptotes, D, G, celles de MA' avec les mêmes droites, et I l'intersection de DG avec CY.

Par ce qui précède, l'angle MFX est complément de l'angle MF'X; il est donc égal a CIF'; mais MFX et CIF' sont respectivement des angles extérieurs dans les triangles CFH et CGI, d'où il suit qu'on doit avoir

$$\text{Ang.ICH}+\text{Ang.IGC}=\text{Ang.CHF}+\text{Ang.HCF}\,;$$

ou simplement, à cause de Ang.ICH=Ang.GCF,

$$\text{Ang.IGC ou Ang.HGM}=\text{Ang.CHF ou Ang.GHM}\,;$$

et, comme les angles MDB et MBD sont les complémens respectifs de ces deux-là, ils doivent aussi être égaux.

M. *Fauquier* a déduit de cette proposition la conséquence que voici. Soient C le centre (fig. 16) et A, A' les sommets d'une hyperbole équilatérale; soient pris les arcs

$$Am=A'm',\ An=A'n',\ \text{d'où}\ mn=m'n'\,;$$

soient joints les points m, m', n, n', à un point quelconque P de la courbe par des droites coupant l'une des asymptotes en g, g', h, h'. Les points m et m', ainsi que les points n et n', se trouvant, par la construction, les extrémités d'un même diamètre, les triangles mPn et $m'Pn'$ seront semblables, par ce qui précède, comme ayant des angles égaux en g et g', h et h'; on aura donc

$$\text{Ang.}mPn=\text{Ang.}m'Pn'.$$

GÉOMÉTRIE.

Analogies entre le triangle et le tétraèdre ;

Par M. FERRIOT, principal du collége de Baume.



On trouvera dans ce mémoire quelques propositions déjà connues, mais que j'ai cru néanmoins devoir y comprendre, afin d'en former un tout plus complet.

§. I.

1. *Avec trois droites données, telles que chacune soit moindre que la somme des deux autres, on peut toujours former un triangle, et on n'en peut former qu'un seul.*

2. *Avec six droites données et inégales, telles que chacune d'elles soit moindre que la somme de deux quelconques des autres, on peut toujours former* 60 *tétraèdres différens, dont* 30 *sont symétriques par rapport aux* 30 *autres, et on n'en saurait former un plus grand nombre.*

Soient en effet a, b, c, d, e, f, les six droites données, on pourra choisir trois d'entre elles de 20 manières différentes pour former la base du tétraèdre ; et, le choix de ces trois étant fait, il y aura encore six manières d'ajuster d'un côté de cette base les trois arêtes restantes, ce qui fera en tout 120 tétraèdres, et on en obtiendra 120 autres symétriques à ceux-là, en ajustant les mêmes trois arêtes restantes de l'autre côté de la face prise pour base; mais il est évident qu'en procédant ainsi, les tétraèdres ne différeront, quatre à quatre, que par la face sur laquelle ils se trouveront posés : donc, en effet,

le nombre des tétraèdres essentiellement différens se réduira à 60 seulement, dont 30 seront symétriques par rapport aux 30 autres.

Remarque I. La condition que l'une quelconque des six droites données soit moindre que la somme de deux prises d'une manière quelconque parmi les cinq autres, équivaut à 60 inégalités lesquelles doivent toutes avoir lieu pour que les 60 tétraèdres soient possibles. Si donc quelques-unes de ces inégalités n'étaient pas satisfaites, le nombre des tétraèdres possibles s'en trouverait d'autant diminué. Il serait plus long que difficile de déterminer à combien il se réduirait dans chaque cas.

Remarque II. Si plusieurs des droites données étaient égales entre elles; quand bien même toutes les conditions d'inégalité se trouveraient satisfaites, il pourrait y avoir diverses séries de tétraèdres égaux et superposables, en sorte que le nombre des tétraèdres différens tomberait alors au-dessous de 60. Il serait encore facile ici de déterminer à combien leur nombre se réduirait dans chaque cas. En particulier si les six droites données étaient toutes égales, auquel cas les 60 conditions d'inégalité se trouveraient satisfaites d'elles-mêmes, tous les tétraèdres se réduiraient à un seul qui serait le tétraèdre régulier.

Remarque III. Enfin, il pourrait arriver à la fois que les droites données ne satisfissent pas aux 60 conditions d'inégalité et qu'en outre plusieurs de ces droites fussent égales entre elles; on aurait alors deux causes qui conspireraient à la fois à réduire le nombre des tétraèdres possibles et réellement différens.

§. 2.

1. *Les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle se coupent toutes trois en un même point qui est le centre du cercle circonscrit.*

2. *Les plans perpendiculaires sur les milieux des arêtes d'un tétraèdre, se coupent tous six en un même point qui est le centre de la sphère circonscrite.*

Ou autrement;

Les perpendiculaires élevées aux faces d'un tétraèdre par les centres des cercles circonscrits à ces faces, se coupent toutes quatre en un même point qui est le centre de la sphère circonscrite.

Ces propositions deviennent évidentes si l'on considère que les arêtes d'un tétraèdre sont des cordes de la sphère qui lui est circonscrite, que les cercles circonscrits à ses faces, sont des cercles de cette même sphère, et que les plans perpendiculaires sur les milieux des cordes d'une sphère ainsi que les droites menées par les centres de ses cercles perpendiculairement à leur plan, passent nécessairement par le centre de cette sphère.

§. 3.

1. *Les droites qui partagent les angles d'un triangle en deux parties égales, se coupent toutes trois en un même point qui est le centre du cercle inscrit.*

2. *Les plans qui divisent les angles dièdres d'un tétraèdre en deux parties égales, se coupent tous six en un même point qui est le centre de la sphère inscrite.*

Ou autrement,

Les droites qui, partant des sommets des angles trièdres d'un tétraèdre, font des angles égaux avec les faces de ces angles trièdres, se coupent toutes quatre en un même point qui est le centre de la sphère inscrite.

En effet, 1.° les deux faces de l'un quelconque des angles dièdres d'un tétraèdre sont des plans tangens à la sphère inscrite, et il est évident que le plan qui divise en deux parties égales l'angle formé par ces deux-là, doit passer par le centre de la sphère.

2.° Soit un angle trièdre circonscrit à une sphère; le cône droit inscrit à cet angle trièdre sera comme lui circonscrit à la sphère; or, il est facile de voir que l'axe de ce cône, lequel ne sera autre chose qu'une droite qui, partant du sommet de l'angle trièdre, fera des angles égaux avec ses faces, passera par le centre de la sphère (*).

(*) Il existe toujours quatre cercles tangens à la fois aux trois côtés d'un même

§. 4.

1. *Les droites qui joignent les sommets d'un triangle aux milieux des côtés opposés, se coupent toutes trois en un même point qui est le centre de gravité ou le centre des moyennes distances des trois sommets de ce triangle.*

---

triangle, considérés comme des droites indéfinies; l'un de ces cercles est intérieur au triangle et touche, à proprement parler, ses trois côtés; les trois autres lui sont extérieurs, et chacun d'eux touche un côté et les prolongemens des deux autres au delà du premier.

Si, pour chacune des droites qui par leur intersection forment un triangle, on regarde comme côté positif celui des deux côtés de cette droite qui regarde l'intérieur du triangle, et comme négatif le côté opposé, on pourra dire que, des quatre cercles qui touchent à la fois les trois côtés d'un triangle, un touche ces trois côtés positivement, tandis que chacun des trois autres touche seulement deux côtés positivement et le troisième négativement.

Huit sphères différentes peuvent, en général, toucher à la fois les quatre faces d'un même tétraèdre, considérées comme des places indéfinies; et ces huit sphères, considérées relativement à leur situation par rapport au tétraèdre, peuvent être distribuées dans les trois classes que voici : 1.° une *sphère intérieure* qui est proprement la sphère inscrite; 2.° quatre *sphères sur les faces* dont chacune touche une face extérieurement et touche les prolongemens des trois autres au delà de cette première; 3.° enfin trois *sphères sur les arêtes*, touchant les prolongemens des quatre faces au delà de l'une des arêtes; ces dernières répondent toujours aux trois arêtes d'un même angle trièdre ou aux trois arêtes d'une même face.

Si, pour chacun des plans qui par leur intersection forment un tétraèdre, on regarde, comme côté positif, celui des deux côtés de ce plan qui regarde l'intérieur du tétraèdre, et comme négatif le côté opposé, on pourra dire que, des huit sphères qui touchent à la fois les quatre faces d'un tétraèdre, celle qui est inscrite touche ces quatre faces positivement; que les sphères sur les faces touchent seulement trois faces positivement et la quatrième négativement; qu'enfin celles qui répondent aux arêtes touchent deux faces positivement et les deux autres négativement.

Si, en particulier, le tétraèdre est régulier, les sphères qui répondent aux arêtes ont leur centre à une distance infinie et leur rayon infini; de plus chacune d'elles peut être indifféremment considérée comme répondant à une arête ou à son opposée; en sorte qu'on peut dire également, ou que les faces d'un tel tétraèdre ne peuvent être touchées que par cinq sphères seulement, ou qu'elles peuvent être touchées par onze sphères dont six sont infinies. (*Note des éditeurs.*)

2. *Les droites qui joignent chaque sommet d'un tétraèdre au centre commun de gravité ou des moyennes distances de ses trois autres sommets, se coupent toutes quatre en un même point qui est le centre de gravité ou des moyennes distances des quatre sommets de ce tétraèdre.*

On peut se convaincre facilement, comme il suit, de la vérité de ces deux propositions : 1.° si l'on joint les milieux des côtés du triangle donné par des droites, on formera un nouveau triangle inscrit au premier et dans lequel les droites, joignant les sommets aux milieux des côtés opposés, seront encore les mêmes que dans le premier ; en opérant d'une manière semblable sur ce nouveau triangle et poursuivant ainsi à l'infini, on formera une série de triangles continuellement décroissans, dont le dernier se réduira à un point unique qui, contenant toujours les trois droites dont il s'agit, sera conséquemment leur commune section.

2.° Pareillement, en considérant les centres des moyennes distances des aires des faces du tétraèdre donné comme les sommets d'un nouveau tétraèdre inscrit à celui-là, il est facile de voir que les droites qui, dans ce dernier, joindront les sommets aux centres des moyennes distances des aires des faces opposées, seront les mêmes que dans le premier ; opérant donc de la même manière sur ce nouveau tétraèdre et poursuivant ainsi à l'infini, on formera une série de tétraèdres continuellement décroissans, dont le dernier se réduira à un point unique qui, contenant toujours les quatre droites dont il sagit, sera conséquemment leur commune section.

Corollaire. Les triangles et tétraèdres dont il vient d'être question étant tous semblables et ayant leurs côtés et faces homologues parallèles, on peut établir les propositions suivantes :

1.° *Si par les sommets d'un triangle donné on mène des parallèles aux côtés opposés, ces parallèles formeront un nouveau triangle tel que les sommets du premier se trouveront situés aux milieux de ses côtés.*

2.° *Si par les sommets d'un tétraèdre donné on mène des plans parallèles aux faces opposées, ces plans formeront un nouveau*

tétraèdre tel que les sommets du premier se trouveront situés aux centres des moyennes distances de ses faces.

Remarque I. Les triangles inscrits les uns aux autres dont il a été question ci-dessus étant tels que les côtés de chacun sont moitiés de leurs homologues dans celui qui le précède immédiatement; si l'on prend pour unité le contour du plus grand, la somme des contours des autres sera

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots\ldots=1.$$

Et, si l'on prend pour unité l'aire du plus grand, la somme des aires des autres sera

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots\ldots=\frac{1}{3}.$$

Remarque II. Les tétraèdres inscrits les uns aux autres dont il a été question ci-dessus, étant tels que les arêtes de chacun sont le tiers de leurs homologues dans celui qui le précède immédiatement; si l'on prend pour unité la surface du plus grand, la somme des surfaces des autres sera

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{9^4}+\ldots\ldots=\frac{1}{8}.$$

Et, si l'on prend pour unité le volume du plus grand, la somme des volumes des autres sera

$$\frac{1}{27}+\frac{1}{27^2}+\frac{1}{27^3}+\frac{1}{27^4}+\ldots\ldots=\frac{1}{26}.$$

§. 5.

1. *L'un quelconque des côtés d'un triangle est égal à la somme des produits des deux autres par les cosinus de leurs inclinaisons sur celui-là.*

2. *L'une quelconque des faces d'un tétraèdre est égale à la somme des produits des trois autres par les cosinus de leurs inclinaisons sur celle-là.*

Soient c, c', c'', les trois côtés d'un triangle ; le côté c'', par exemple, n'est autre chose que la somme des projections des côtés c, c', sur sa direction (le mot somme étant pris ici comme en algèbre); ainsi on doit avoir

$$c''=c\,\text{Cos.}(cc'')+c'\,\text{Cos.}(c'c'').$$

Soient t, t', t'', t''', les quatre faces d'un tétraèdre ; la face t''', par exemple, n'est autre chose que la somme des projections des faces t, t', t'', sur son plan (le mot somme étant toujours pris dans le même sens); ainsi on doit avoir

$$t'''=t\,\text{Cos.}(tt''')+t'\,\text{Cos.}(t't''')+t''\,\text{Cos.}(t''t''').$$

§. 6.

1. *Le quarré de l'un des côtés d'un triangle égale la somme des quarrés des deux autres moins le double du produit de ces mêmes côtés et du cosinus de leur inclinaison l'un à l'autre.*

2. *Le quarré de l'aire de l'une des faces d'un tétraèdre égale la somme des quarrés des trois autres moins les doubles des produits de ces mêmes faces multipliées deux à deux et par les cosinus de leurs inclinaisons les unes aux autres.*

En effet 1.° on a, par ce qui précède,

$$c\;=c'\,\text{Cos.}(cc')+c''\,\text{Cos.}(cc''),$$
$$c'=c''\,\text{Cos.}(c'c'')+c\,\text{Cos.}(cc'),$$
$$c''=c\,\text{Cos.}(cc'')+c'\,\text{Cos.}(c'c'');$$

multipliant respectivement ces équations par leur premier membre, et retranchant ensuite la dernière de la somme des deux premières, il viendra, en réduisant et transposant,

$$c''^2=c^2+c'^2-2cc'\,\text{Cos.}(cc').$$

2.° On a aussi, par ce qui précède,

$$t\;=t'\,\text{Cos.}(tt')+t''\,\text{Cos.}(tt'')+t'''\,\text{Cos.}(tt'''),$$
$$t'=t''\,\text{Cos.}(t't'')+t'''\,\text{Cos.}(t't''')+t\,\text{Cos.}(tt'),$$

$$t'' = t'''\text{Cos.}(t''t''') + t\,\text{Cos.}(t\,t'') + t'\,\text{Cos.}(t'\,t''),$$

$$t''' = t\;\;\text{Cos.}(t\,t''') + t'\text{Cos.}(t't''') + t''\text{Cos.}(t''t'''),$$

multipliant respectivement ces équations par leur premier membre, et retranchant ensuite la dernière de la somme des trois premières, il viendra, en réduisant et transposant,

$$t'''^2 = t^2 + t'^2 + t''^2 - 2tt'\text{Cos.}(tt') - 2tt''\text{Cos.}(tt'') - 2t't''\text{Cos.}(t't'').$$

Corollaire. Il suit de là 1.° que, *dans un triangle rectangle, le quarré de l'hypothénuse est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés*; 2.° que, *dans un tétraèdre rectangle, le quarré de l'aire de la face hypothénusale est égal à la somme des quarrés des aires des trois autres faces.*

§. 7.

1. *Dans tout triangle, la somme des trois angles est constante et égale à deux angles droits.*

2. *Dans un tétraèdre dont les arêtes opposées sont perpendiculaires, la somme des six angles dièdres augmentée de la somme des douze inclinaisons des six arêtes sur les quatre faces est constante et égale à douze angles droits.*

Soient A, B deux arêtes opposées du tétraèdre; par A soit fait passer un plan perpendiculaire à B; ce plan déterminera un triangle dont un des angles mesurera l'inclinaison des deux faces qui passent par B, tandis que les deux autres mesureront les inclinaisons de l'arête A sur ces deux faces; opérant de même successivement sur chaque arête, on en conclura que la somme des angles dièdres et des inclinaisons des arêtes sur les faces est la même que la somme des angles de six triangles; c'est-à-dire, que cette somme est constante et égale à douze angles droits.

§. 8.

1. *Les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sur les directions des côtés opposés se coupent toutes trois en un même point.*

2.°

2.° Si deux arêtes contiguës d'un tétraèdre sont respectivement perpendiculaires à leurs opposées, les deux arêtes restantes seront aussi perpendiculaires l'une à l'autre, et alors les perpendiculaires abaissées des sommets du tétraèdre sur les plans des faces opposées se couperont toutes quatre en un même point lequel est aussi le point d'intersection des six plans conduits par chaque arête, perpendiculairement à son opposée.

Ce même point est encore celui où se coupent les quatre perpendiculaires élevées aux faces du tétraèdre par les points de ces faces où se coupent les trois perpendiculaires abaissées de leurs sommets sur les directions des côtés opposés.

Soient a, b, c, les trois arêtes de la base d'un tétraèdre; a', b', c', celles qui leur sont respectivement opposées et qui conséquemment concourent au sommet; supposons que a' et b' soient respectivement perpendiculaires à a et b; par a' et b' soient fait passer deux plans A et B respectivement perpendiculaires à a et b, et ayant pour intersections avec la base du tétraèdre deux droites α et β se coupant en o: ces deux plans se coupant eux-mêmes suivant une droite p passant par o et par le sommet du tétraèdre; enfin, par c' et p soit conduit un plan C, dont l'intersection avec la base sera une droite γ, passant par o: a étant perpendiculaire à A doit l'être aussi à α, et b doit pareillement être perpendiculaire à β; α et β ne sont donc autre chose que les perpendiculaires abaissées sur les directions de a et b des sommets qui leur sont opposés; donc γ qui passe par o, intersection de α et β, est aussi une perpendiculaire abaissée sur la direction de c du sommet de l'angle opposé : de plus A et B étant respectivement perpendiculaires à a et b, sont perpendiculaires à la base du tétraèdre, et conséquemment leur intersection p est aussi perpendiculaire à cette base, et par suite à c; le plan C qui passe par p et par γ perpendiculaires à c, est donc lui-même perpendiculaire à cette droite; la droite c' qui est dans ce plan est donc aussi perpendiculaire à c; ce qui démontre la première partie de la proposition. Le même raisonnement prouve aussi que, dans un tétraèdre dont les

arêtes sont à angles droits, la perpendiculaire abaissée sur le plan d'une face, du sommet de l'angle opposé, se termine au point de cette face où se croisent les perpendiculaires abaissées sur les directions de ses côtés des sommets des angles opposés.

Le tétraèdre ayant ainsi ses arêtes opposées perpendiculaires l'une à l'autre ; concevons que, par les trois arêtes de sa base, on conduise des plans perpendiculaires aux arêtes qui leur sont respectivement opposées ; ces trois plans se couperont en un certain point suivant trois droites passant par ce point, et qui, par ce qui vient d'être démontré, ne seront autre chose que les perpendiculaires abaissées respectivement des trois sommets de la base sur les plans des faces opposées. De plus, il arrivera aussi, par ce qui précède, que le point de chacune de ces faces où se terminera la perpendiculaire tombant sur son plan, sera celui où se croisent les perpendiculaires abaissées des sommets de cette face sur les directions des côtés opposés.

Ainsi, dans un tétraèdre dont les arêtes opposées sont à angle droit, chacune des perpendiculaires abaissées d'un sommet sur le plan de la face opposée, se termine au point de cette face où se croisent les perpendiculaires abaissées de ses trois sommets sur les directions des côtés opposés ; et trois de ces perpendiculaires se coupent, et se coupent en un même point ; d'où il résulte qu'elles se coupent toutes quatre en ce point ; et, comme chacune d'elles est la commune section de trois des plans conduits par des arêtes perpendiculairement à leurs opposées, il faut en conclure que les six plans conduits de cette manière passent aussi par ce point.

Remarque. Il est facile de s'assurer que ces propositions ont leur réciproque, et qu'ainsi, si un tétraèdre a seulement deux arêtes opposées perpendiculaires, les perpendiculaires abaissées de ses quatre sommets sur les plans des faces opposées se couperont deux à deux et seront comprises dans deux plans, tandis qu'il n'y aura aucun point commun à plusieurs de ces perpendiculaires, si aucune des arêtes du tétraèdre n'est perpendiculaire à son opposée.

§. 9.

1. *Dans tout triangle, les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés se coupent toutes trois au même point.*

2. *Dans tout tétraèdre dont les arêtes opposées sont à angle droit, les perpendiculaires élevées aux plans des faces par leurs centres de gravité se coupent toutes quatre en un même point.*

En effet, les centres de gravité des faces du tétraèdre dont il s'agit, peuvent (§. 4.) être considérés comme les sommets d'un tétraèdre semblable à celui-là, et ayant ses faces parallèles à leurs homologues dans le premier : ce nouveau tétraèdre a donc, comme le tétraèdre proposé, ses arêtes opposées à angle droit; et par conséquent (§. 8.) les perpendiculaires abaissées de ses sommets sur les plans des faces opposées, lesquelles ne sont autre chose que les perpendiculaires élevées aux plans des faces du premier par les centres de gravité de ces faces, doivent toutes quatre se couper au même point.

§. 10.

1. *Dans tout triangle, l'intersection des perpendiculaires sur les milieux des côtés, le centre commun de gravité des sommets et l'intersection des perpendiculaires abaissées de ces sommets sur les directions des côtés opposés, sont trois points situés sur une même ligne droite, de manière que le second est intermédiaire aux deux autres. De plus, la distance entre les deux derniers est double de la distance entre les deux premiers.*

2. *Dans tout tétraèdre dont les arêtes opposées sont à angle droit, l'intersection des perpendiculaires élevées aux plans des faces par leurs centres de gravité, le centre commun de gravité des sommets du tétraèdre et l'intersection des perpendiculaires abaissées de ces sommets sur les plans des faces opposées sont trois points situés sur une même ligne droite, de manière que le second est intermédiaire aux deux autres. De plus, la distance entre les deux derniers est triple de la distance entre les deux premiers.*

Soit T un triangle, g son centre de gravité et p le point de son plan où se croisent les perpendiculaires abaissées de ses sommets sur les directions des côtés opposés. Soit T′ un autre triangle ayant ses sommets aux milieux des côtés du premier ; soit g' son centre de gravité et p' le point où se croisent les perpendiculaires abaissées de ses sommets sur les directions des côtés opposés. Les deux triangles T et T′ étant semblables (§. 5.), ayant leurs côtés homologues parallèles et dans le rapport de 2 à 1, il en résulte que les distances gp et $g'p'$ qui sont des lignes homologues de ces deux triangles seront parallèles ou dirigées suivant une même droite et qu'on aura $gp=2g'p'$; mais g' étant le même que g (§. 4.), il s'ensuit que p, g, p' sont trois points en ligne droite, parmi lesquels g est intermédiaire à p et p', puisque T′ est situé en sens inverse de T : or, si l'on désigne par q le point où se croisent les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés de T, ce point q ne sera autre chose que le point p' ; donc les points p, g, q, sont en ligne droite, de telle manière que g est intermédiaire à p et q et qu'on a $gp=2gq$.

La même démonstration a lieu pour le tétraèdre, en recourant à un second tétraèdre ayant ses sommets aux centres de gravité des faces du premier.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Recherche de la position des axes principaux dans les surfaces du second ordre ;

Par M. Bret, professeur de mathématiques transcendantes au lycée de Grenoble.



Les formules qui servent à passer d'un système de coordonnées rectangulaires x, y, z, à un système de coordonnées obliques x',

y', z', ayant même origine que les premières sont, comme l'on sait

$$x=x'\text{Cos.}\alpha+y'\text{Cos.}\alpha'+z'\text{Cos.}\alpha''\ ,$$
$$y=x'\text{Cos.}\beta+y'\text{Cos.}\beta'+z'\text{Cos.}\beta''\ ,$$
$$z=x'\text{Cos.}\gamma+y'\text{Cos.}\gamma'+z'\text{Cos.}\gamma''\ .$$

Nous allons donner à ces formules une forme plus commode pour l'objet que nous avons en vue. Soient les équations des axes des x', y', z', ainsi qu'il suit

$$\text{axe des } x' \begin{cases} x=az\ , \\ y=bz\ ; \end{cases} \quad \text{axe des } y' \begin{cases} x=a'z\ , \\ y=b'z\ ; \end{cases} \quad \text{axe des } z' \begin{cases} x=a''z\ , \\ y=b''z\ ; \end{cases}$$

et soient posées les équations

$$h=\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\ , \quad h'=\frac{1}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}}\ , \quad h''=\frac{1}{\sqrt{1+a''^2+b''^2}}\ ;$$

nous aurons

$$\text{Cos.}\alpha=ah\ , \quad \text{Cos.}\alpha'=a'h'\ , \quad \text{Cos.}\alpha''=a''h''\ ,$$
$$\text{Cos.}\beta=bh\ , \quad \text{Cos.}\beta'=b'h'\ , \quad \text{Cos.}\beta''=b''h''\ ,$$
$$\text{Cos.}\gamma=\ h\ ; \quad \text{Cos.}\gamma'=\ h'\ ; \quad \text{Cos.}\gamma''=\ h''\ ;$$

et par conséquent

$$x=ahx'+a'h'y'+a''h''z'\ ,$$
$$y=bhx'+b'h'y'+b''h''z'\ ,$$
$$z=\ hx'+\ h'y'+\ h''z'\ .$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation générale du second degré entre les trois variables x, y, z,

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy+Cx+C'y+C''z+D=0\ ,$$

on obtiendra une nouvelle équation du même degré que l'on pourra

simplifier en disposant des quantités arbitraires a, a', a'', b, b', b'', qui déterminent la position des nouveaux axes. Faisant donc disparaître tous les rectangles des coordonnées, nous aurons les équations

$$(1) \quad (Aa'+B''b'+B')a+(B''a'+A'b'+B)b+(B'a'+Bb'+A'')=0 ,$$

$$(2) \quad (Aa''+B''b''+B')a+(B''a''+A'b''+B)b+(B'a''+Bb''+A'')=0 ,$$

$$(3) \quad (Aa''+B''b''+B')a'+(B''a''+A'b''+B)b'+(B'a''+Bb''+A'')=0 .$$

Cela posé, en éliminant a et b entre l'équation (2) et les équations $x=az$, $y=bz$ de l'axe des x', on tombera sur l'équation d'un plan tel que, l'axe des x' y étant situé d'une manière quelconque, l'équation de la surface sera délivrée du terme en $x'z'$. Pareillement, si entre l'équation (3) et les équations $x=a'z$, $y=b'z$ de l'axe des y' on élimine a' et b', on obtiendra l'équation d'un plan tel que, l'axe des y y étant situé d'une manière quelconque, l'équation de la surface sera délivrée du terme en $y'z'$. Mais, par la forme des équations (2) et (3) les équations des deux plans doivent être les mêmes; donc, en écrivant seulement les équations (2) et (3), on obtient pour un axe quelconque des z', un plan unique des $x'y'$ tel que la nouvelle équation de la surface du second ordre sera privée des rectangles $x'z'$, $y'z'$; et, comme il est toujours facile, l'axe des z' étant constant, ainsi que le plan des $x'y'$, de donner aux axes des x' et des y' une direction telle que le troisième rectangle $x'y'$ disparaisse aussi; il s'ensuit que l'on peut, d'une infinité de manières, donner à l'équation générale des surfaces du second ordre, la forme plus simple

$$Px'^2+P'y'^2+P''z'^2+Qx'+Q'y'+Q''z'+D=0.$$

L'équation du plan des $x'y'$ sera

$$(Aa''+B''b''+B')x+(B''a''+A'b''+B)y+(B'a''+Bb''+A'')z=0.$$

Parmi tous les systèmes d'axes pour lesquels l'équation prend cette forme, il n'en est généralement qu'un seul qui soit rectangulaire. En effet, assujétissons l'axe arbitraire des z', dont les équations sont $x=a''z$, $y=b''z$, à être perpendiculaire au plan des $x'y'$ dont nous venons de trouver l'équation

$$(Aa''+B''b''+B')x+(B''a''+A'b''+B)y+(B'a''+Bb''+A'')z=0\ ;$$

nous obtiendrons les équations de condition

$$(4)\left\{\begin{aligned} &Aa''+B''b''+B'=(B'a''+Bb''+A'')a''\ ,\\ &B''a''+A'b''+B\ =(B'a''+Bb''+A'')b''\ ; \end{aligned}\right.$$

substituant dans la première la valeur de a'' donnée par la dernière, on parvient à l'équation du 3.e degré

$$(5)\left\{\begin{aligned} &\{(A-A')BB'+(B^2-B'^2)B''\}b''^3\\ &+\{(A'-A)(A'-A'')B'-(A+A'-2A'')BB''+(2B''^2-B^2-B'^2)B'\}b''^2\\ &+\{(A''-A)(A''-A')B''-(A+A''-2A')BB'+(2B'^2-B^2-B''^2)B''\}b''\\ &+\{(A-A'')BB''+(B^2-B''^2)B'\}=0. \end{aligned}\right.$$

Or, on démontre, dans les élémens d'algèbre, que cette équation a toujours au moins une racine réelle, et que même, lorsque le coefficient de son premier terme s'évanouit, cette racine est alors infinie, ce qui n'implique point ici contradiction; car b'' exprime une tangente trigonométrique. Par conséquent il existe, pour toutes les surfaces du second ordre, un axe des z', perpendiculaire à un plan des $x'y'$, de manière que l'équation générale de ces surfaces ne renferme plus les rectangles $x'z'$, $y'z'$; et, comme on peut toujours chasser le rectangle $x'y'$ qui reste encore dans l'équation, on en conclut que, non-seulement on trouve un axe des z', perpendiculaire au plan des $x'y'$, qui prive la nouvelle équation des rectangles $x'z'$, $y'z'$, mais encore qu'il existe un axe des x', perpendiculaire au plan des $y'z'$, et un axe des y', perpendiculaire au plan des $x'z'$, jouissant des mêmes propriétés; donc si, au moyen de l'équation (3) et des équations de l'axe des z', on détermine le plan des $x'y'$, on trouvera que son équation est

$$(Aa'+B''b'+B')x+(B''a'+A'b'+B)y+(B'a'+Bb'+A'')z=0.$$

Écrivant que l'axe des y', dont les équations sont $x=a'z$, $y=b'z$, est perpendiculaire à ce plan, on parviendra aux mêmes équations

(4); donc l'équation (5) détermine b' en même temps que b''; on prouvera de même que sa troisième racine doit être b.

On conclut de tout ce qui précède,

1.° Qu'il n'existe, généralement parlant, pour une origine donnée, qu'un système d'axes rectangulaires tel que les surfaces du second ordre, rapportées à ce système, soient privées, dans leur équation, des rectangles xy, xz, yz.

2.° Que les équations des nouveaux axes étant

$$\begin{cases} x=az\,, \\ y=bz\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=a'z\,, \\ y=b'z\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} y=a''z\,, \\ x=b''z\,; \end{cases}$$

l'équation (5) a ses trois racines réelles qui sont b, b', b''; la seconde des équations (4) donnant les valeurs correspondantes de a, a', a''.

3.° Que l'équation

$$t^3-(A+A'+A'')t^2+(A'A''+A''A+AA'-B^2-B'^2-B''^2)t+(AB^2+A'B'^2+A''B''^2-2BB'B''-AA'A'')=0\,,$$

a ses trois racines réelles et donne les valeurs de P, P', P'' dans l'équation transformée

$$Px'^2+P'y'^2+P''z'^2+Qx'+Q'y'+Q''z'+D=0 \;(*)\;;$$

car le procédé que nous avons suivi, dans la recherche de l'équation en t, n'oblige point de faire d'abord disparaître les premières puissances de x, y, z.

Nous observerons en passant que, pour les surfaces du second ordre qui n'ont pas de centre, l'équation en t a nécessairement une ou deux racines qui s'évanouissent.

L'équation (5) pouvant avoir une racine infinie et pouvant aussi être identique, il est nécessaire d'examiner ces différens cas.

D'abord, le premier terme seulement de l'équation (5) s'évanouissant, on a

$$(A-A')BB'+(B^2-B'^2)B''=0.$$

(*) *Voy.* notre précédent mémoire, page 33 de ce volume.

Dans

Dans ce cas, une des racines b'' est infinie, a'' est aussi infini; ainsi les équations $x=a''z$, $y=b''z$ de l'axe des z' deviennent $z=0$; cet axe est donc situé sur le plan des xy. Pour le déterminer, on cherchera le rapport $\frac{b''}{a''}$: or la dernière des équations (4), dans la supposition de a'' et b'' infinis se transforme en celle-ci

$$(B'a''+Bb'')=0 \ , \quad \text{d'où} \quad \frac{b''}{a''}=-\frac{B'}{B} \ ;$$

ainsi, les équations de l'axe cherché sont

$$z=0 \ , \qquad By+B'x=0 \ ;$$

à l'égard des deux autres axes, on les obtient en résolvant une équation du second degré.

Supposons, en second lieu, que les deux premiers termes de l'équation (5) s'évanouissent; alors les deux autres termes disparaissent d'eux-mêmes; ainsi les deux équations

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} (A-A')BB'+(B^2-B'^2)B''=0 \ , \\ (A-A'')BB''+(B^2-B''^2)B'=0 \ , \end{array} \right.$$

expriment que l'équation (5) est identique. Il existe donc, dans ce cas, pour une même origine donnée, une infinité de systèmes d'axes rectangulaires pour lesquels l'équation générale des surfaces du second degré ne renferme aucun des rectangles des coordonnées. Pour étudier ces différens systèmes, nous remonterons aux équations (4), mises sous cette forme

$$B'a''^2+B\,a''b''+(A''-A)a''-B''b''-B'=0 \ ,$$
$$B\,b''^2+B'a''b''+(A''-A')b''-B''a''-B=0 \ ;$$

retranchant du produit de la première des équations (6) par B'' le produit de la seconde par B', en divisant le résultat par B, il viendra

$$(A''-A')B'B''+(B''^2-B'^2)B=0 \ ,$$

éliminant $A''-A$ et $A''-A'$ des deux équations ci-dessus, au moyen de cette dernière et de la dernière des équations (6), il viendra

$$(B\,a''-B'')(B'B''a''+BB''b''+BB')=0 \ ,$$
$$(B'b''-B'')(B'B''a''+BB''b''+BB')=0 \ .$$

Ces deux équations sont satisfaites en posant

$$Ba''-B''=0\ ,$$
$$B'b''-B''=0\ ;$$

ce qui détermine un axe dont les équations sont

$$Bx-B''z=0\ ,$$
$$B'y-B''z=0\ ;$$

ensuite on a l'équation commune aux deux autres axes

$$B'B''a''+BB''b''+BB'=0\ ;$$

éliminant a'', b'', entre cette équation et les équations $x=a''z$, $y=b''z$ de l'axe des z', on obtient le résultat

$$B'B''x+B''By+BB'z=0\ ;$$

équation d'un plan perpendiculaire à l'axe déjà déterminé, et qui contient les deux autres axes rectangulaires. La rencontre de ce plan avec la surface du second ordre donne une courbe du second degré qui aura par conséquent une infinité de systèmes d'axes rectangulaires, puisque son équation sera dépourvue du rectangle des coordonnées; or, on sait que le cercle est la seule courbe du second degré qui jouisse de cette propriété; donc la section faite par ce plan est un cercle. Si l'on transporte l'origine des coordonnées au centre de ce cercle, l'équation de la surface rapportée au nouveau système prendra la forme

$$x^2+y^2+kz^2+k'z+k''=0\ ,$$

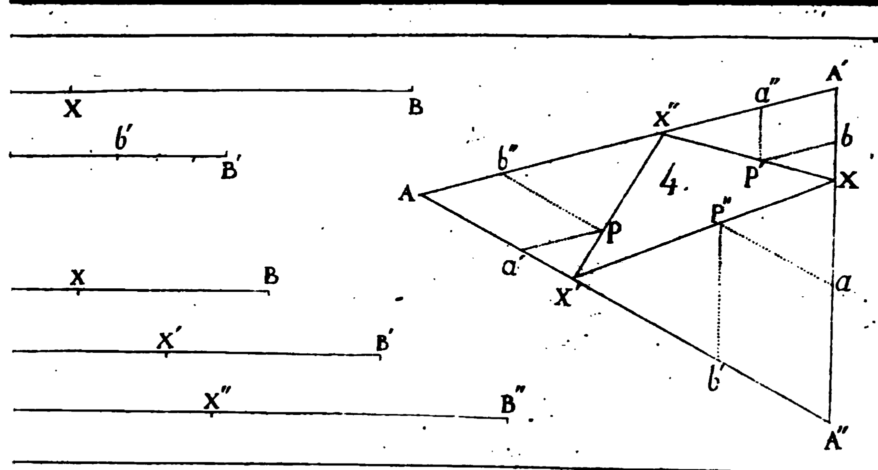
équation qui appartient à une surface de révolution.

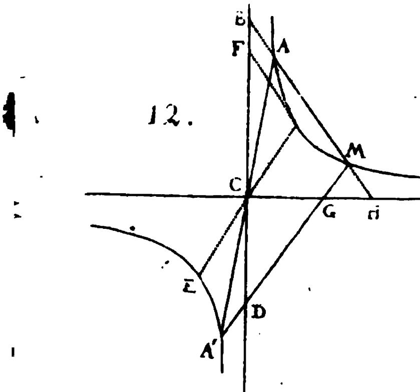
On conclut de là que l'équation

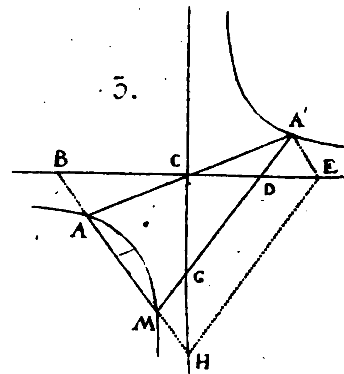
$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+Cx+C'y+C''z+D=0\ ,$$

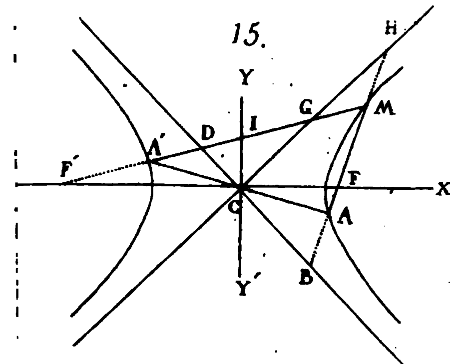
lorsque les équations (6) sont satisfaites, représente toujours une surface de révolution du second ordre; et que, si l'on veut chasser de cette équation les rectangles xy, yz, zx, en passant à un nouveau système rectangulaire, on obtiendra une infinité de ces systèmes, l'un des nouveaux étant fixe.

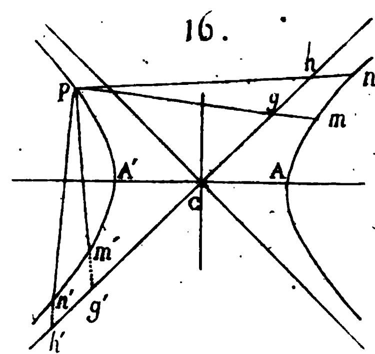
Il nous reste encore à discuter ce qui arrive dans les surfaces


X
B
b′
B′
X
B
X′
B′
X″
B″
A′
a″
X″
b
b″
4.
P′
X
A
P″
P
a′
X′
a
b′
A″


12.
B
F
A
M
C
G
H
E
D
A′


5.
A′
B
C
E
D
A
G
M
H


15.
H
Y
G
M
D
I
A′
F′
F
X
C
A
Y′
B


16.
h
n
P
g
m
A′
A
C
m′
n′
g′
h′

J. D. G. fecit.

du second ordre, lorsque un, deux ou trois rectangles des coordonnées manquent dans leur équation.

D'abord, pour qu'il y ait une infinité de systèmes de coordonnées rectangles, il faut toujours que les équations (6) aient lieu. Soit donc $B'=0$, nous aurons $B=0$; et comme alors le plan dont l'équation est

$$B'B''x+B''By+BB'z=0 ,$$

n'existe plus, puisque son équation se réduit à $0=0$, nous reprendrons l'équation des surfaces qui aura la forme

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2B''xy+Cx+C'y+C''z+D=0.$$

Faisant disparaître le rectangle xy, en passant à un nouveau système rectangulaire dans le plan des xy, nous obtiendrons l'équation

$$Px^2+P'y^2+A''z^2+gx+g'y+C''z+D=0 ,$$

dans laquelle P et P' seront les racines de l'équation

$$t^2-(A+A')t+(AA'-B''^2)=0. \quad (*).$$

Maintenant il s'agit de produire tous les systèmes rectangulaires de manière que l'équation des surfaces conserve toujours cette forme,

$$Px^2+P'y^2+A''z^2+gx+g'y+C''z+D=0.$$

Substituant à x, y, z, les formules

$$x=ahx'+a'h'y'+a''h''z' ,$$
$$y=bhx'+b'h'y'+b''h''z' ,$$
$$z=\ hx'+\ h'y'+\ h''z' ,$$

et faisant disparaître tous les rectangles qui s'introduisent, on trouvera des équations qui servent à déterminer le plan de deux axes,

$$Pa''x+P'b''y+A''z=0 ;$$

écrivant que la droite dont les équations sont $x=a''z$, $y=b''z$, est perpendiculaire à ce plan, on aura les équations

$$(P-A'')a''=0 ,$$
$$(P'-A'')b''=0 .$$

(*) *Voy.* le mémoire déjà cité.

1.° Supposons que P, P', A'' soient différens ; il s'ensuivra que

$$a''=0\ , \qquad b''=0\ ;$$

conséquemment on retombera sur le système d'axes rectangulaires d'où l'on était parti.

2.° Supposons $P=P'$, et A'' de grandeur différente ; on aura encore

$$a''=0\ , \qquad b''=0\ ;$$

ce qui redonne l'axe primitif z ; mais les axes des x et des y pouvant être pris rectangulaires d'une infinité de manières différentes, la surface sera alors de révolution autour de l'axe des z.

Si l'on supposait $P=A''$, et P' de grandeur différente, on démontrerait également qu'il existe une infinité de systèmes rectangulaires et que la surface du second ordre est de révolution autour de l'axe qui est fixe. Comme P est racine de l'équation

$$t^2-(A+A')t+(AA'-B''^2)=0\ ,$$

l'hypothèse de $P=A''$ donnera

$$A''^2-(A+A')A''+AA'-B''^2=0\ ,$$

ou

$$(A''-A)(A''-A')-B''^2=0.$$

3.° Soit enfin $P=P'=A''$; alors l'équation de la surface devient celle d'une sphère, et elle a évidemment une infinité de systèmes d'axes rectangulaires principaux.

ANALISE.

Méthode nouvelle et fort simple pour la résolution de l'équation générale du quatrième degré ;

Par M. Pilatte, professeur de mathématiques spéciales au lycée d'Angers.



Soit l'équation du quatrième degré, sans second terme,

$$x^4+px^2+qx+r=0. \qquad \text{(A)}$$

Soit fait $x=y+t$; il viendra, en substituant et ordonnant par rapport à y,

$$\left.\begin{array}{r} y^4+4ty^3+6t^2 \\ +2p \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} y^2+4t^3 \\ +2pt^2 \\ +q \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} y+t^4 \\ +pt^2 \\ +qt \\ +r \end{array}\right| =0, \qquad (B)$$

Soit fait

$$4ty^3+(4t^3+2pt^2+q)y=0 ; \qquad (C)$$

l'équation (B) deviendra

$$y^4+(6t^2+2p)y^2+(t^4+pt^2+qt+r)=0. \qquad (D)$$

Mais l'équation (C), délivrée du facteur y, donne

$$y^2=-t^2-\frac{p}{2}t-\frac{q}{4t}. \qquad (E)$$

En substituant cette valeur et son quarré dans l'équation (D), on obtient la réduite

$$t^6+\frac{p}{2}t^4+\left(\frac{p^2}{16}-\frac{r}{4}\right)t^2-\frac{q^2}{64}=0. \qquad (F)$$

Soient t', t'', t''', $-t'$, $-t''$, $-t'''$, les six racines de cette équation, on aura, par la théorie connue,

$$\frac{p}{2}=-t'^2-t''^2-t'''^2 ; \qquad \frac{q^2}{64}=t'^2t''^2t'''^2 \quad \text{ou} \quad \frac{q}{4}=\pm 2t't''t'''.$$

Le signe supérieur répondant à la valeur $+t'$ et l'inférieur à la valeur $-t'$.

Substituant dans la valeur (E) de y^2 en y mettant pour t l'une des trois valeurs t', t'', t''', la première par exemple, on trouvera, à cause du double signe de la valeur de $\frac{q}{4}$,

$$y=\pm(t''-t''') , \qquad y=\pm(t''+t''') ;$$

mais on a, dans le premier cas, $x=y+t'$ et dans le second $x=y-t'$; il viendra donc

$$x=+t'+t''-t''' ;$$
$$x=+t'-t''+t''' ;$$
$$x=-t'+t''+t''' ;$$
$$x=-t'-t''-t''' .$$

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 64 de ce volume ;

Par M. Rochat, professeur de mathématiques et de navigation à St-Brieux.



PROBLÈME. *Trois figures planes étant données de grandeur seulement, sur trois plans, non parallèles deux à deux, donnés de position ; déterminer un quatrième plan sur lequel ces figures étant projetées orthogonalement, les aires de leurs projections soient proportionnelles à des nombres donnés ?*

Solution. Représentons par A, B, C, les aires des trois figures données ; par a, b, c, les nombres proportionnels aux projections orthogonales de ces figures ; par α, β, γ, les angles dièdres que forment, deux à deux, les plans de ces figures ; enfin par x, y, z, les angles que forment ces plans avec le plan cherché.

Les plans des trois figures données et le plan cherché forment une pyramide triangulaire dont les angles dièdres sont α, β, γ, x, y, z ; or, d'après un théorème connu, on a

$$\begin{aligned}
0=1&-(\mathrm{Cos.}^2\alpha+\mathrm{Cos.}^2\beta+\mathrm{Cos.}^2\gamma+\mathrm{Cos.}^2x+\mathrm{Cos.}^2y+\mathrm{Cos.}^2z)\\
&+(\mathrm{Cos.}^2\alpha.\mathrm{Cos.}^2x+\mathrm{Cos.}^2\beta.\mathrm{Cos.}^2y+\mathrm{Cos.}^2\gamma.\mathrm{Cos.}^2z)\\
&-2(\mathrm{Cos.}\gamma.\mathrm{Cos.}x.\mathrm{Cos.}y+\mathrm{Cos.}\alpha.\mathrm{Cos.}y.\mathrm{Cos.}z+\mathrm{Cos.}\beta.\mathrm{Cos.}z.\mathrm{Cos.}x+\mathrm{Cos.}\alpha.\mathrm{Cos.}\beta.\mathrm{Cos.}\gamma)\\
&-2(\mathrm{Cos.}\alpha.\mathrm{Cos.}\beta.\mathrm{Cos.}x.\mathrm{Cos.}y+\mathrm{Cos.}\beta.\mathrm{Cos.}\gamma.\mathrm{Cos.}y.\mathrm{Cos.}z+\mathrm{Cos.}\gamma.\mathrm{Cos.}\alpha.\mathrm{Cos.}z.\mathrm{Cos.}x).
\end{aligned}$$

Mais, d'après un autre théorème connu, les projections orthogonales des figures A, B, C, sur le plan cherché sont représentées par $A.\text{Cos}.x$, $B.\text{Cos}.y$, $C.\text{Cos}.z$; et puisque ces projections doivent être porportionnelles aux nombres a, b, c, on aura

$$cA.\text{Cos}.x=aC.\text{Cos}.z\ , \qquad cB.\text{Cos}.y=b.C.\text{Cos}.z.$$

Or, si, dans l'équation ci-dessus, on substitue pour Cos.x et Cos.y, les valeurs que donnent ces deux dernières, l'équation résultante n'étant que du second degré en Cos.z, l'angle z pourra être déterminé, et par suite les angles x et y.

Le problème est donc ramené à celui-ci : deux plans qui se coupent étant donnés de position, mener un troisième plan qui fasse avec ces deux-là des angles respectivement égaux à deux angles donnés.

Or, on a des méthodes graphiques et des méthodes de calcul pour résoudre ce dernier problème; on voit, en effet, qu'il est question de résoudre un triangle sphérique dans lequel les trois angles sont connus.

Autre solution du même problème ;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

Lemme. Soient trois points (non en ligne droite) donnés de position dans l'espace, et soit un quatrième point (hors de leur plan) donné de position ; on demande de mener, par ce quatrième point, un plan sur lequel abaissant des perpendiculaires des trois premiers, les rapports de ces perpendiculaires soient égaux à des rapports donnés ?

Ce lemme donne lieu à différens cas, suivant que les trois premiers points donnés sont supposés devoir être situés d'un même côté du plan cherché ou de différens côtés de ce plan. Pour fixer les idées, je supposerai d'abord que les trois premiers points doivent être situés d'un même côté du plan cherché.

Pour abréger, que les trois premiers points soient désignés par A, A', A'', et que le quatrième point donné soit désigné par B.

Que les rapports donnés soient des rapports d'inégalité, et que la perpendiculaire abaissée du point A'' doive être plus grande que chacune des autres.

Soient prolongées les droites $A''A$, $A''A'$ en D, D', de manière que les rapports de $A''D$ à AD et de $A''D'$ à $A'D'$ soient respectivement égaux aux rapports donnés. Le plan mené par les points B, D, D', sera le plan cherché.

Remarque I. Pour que le problème (s'il est possible) soit déterminé, les points A, A', A'', ne doivent pas être situés sur une même droite, et le point B, s'il est situé sur quelqu'une des droites $A''A$, $A''A'$, ne doit pas coïncider avec l'un des points D, D'.

Remarque II. Lorsque l'un des rapports donnés, tel que celui des perpendiculaires abaissées des points A'' et A' est un rapport d'égalité, le plan cherché est parallèle à la droite $A''A'$; et partant il passe par la droite menée par B parallèlement à $A''A'$.

Si les rapports donnés sont chacun des rapports d'égalité, le plan cherché est parallèle au plan $AA'A''$.

Remarque III. Que les points donnés doivent être situés de différens côtés du plan cherché; que, par exemple, le point A'' doive être situé d'un côté de ce plan, et les points A, A' du côté opposé:

Alors les points D, D' au lieu d'être sur les prolongemens des droites $A''A$, $A''A'$, devront être sur ces droites elles-mêmes.

Remarque IV. Cette conception géométrique de la solution du lemme proposé me paraît plus lumineuse que le développement algébrique (appelé analitique).

Que le point donné B soit pris pour l'origine des coordonnées rectangulaires;

que les coordonnées des points $\begin{Bmatrix} A \\ A' \\ A'' \end{Bmatrix}$ soient respectivement $\begin{Bmatrix} a\,,\; b\,,\; c\,, \\ a'\,,\; b'\,,\; c'\,, \\ a''\;\; b''\;\; c''\,; \end{Bmatrix}$

que l'équation du plan cherché soit

xCos.

$$x\text{Cos.}\alpha+y\text{Cos.}\beta+z\text{Cos.}\gamma=0.$$

Les perpendiculaires abaissées des points donnés sur ce plan seront

pour A , $a\ \text{Cos.}\alpha+b\ \text{Cos.}\beta+c\ \text{Cos.}\gamma$;

pour A' , $a'\text{Cos.}\alpha+b'\ \text{Cos.}\beta+c'\ \text{Cos.}\gamma$;

pour A'' , $a''\text{Cos.}\alpha+b''\text{Cos.}\beta+c''\text{Cos.}\gamma$.

Que les rapports de ces perpendiculaires soient respectivement ceux des quantités données m, m', m''; on obtiendra, entre les cosinus des angles α, β, γ, deux équations desquelles on déduira les rapports de ces cosinus; puis on déterminera chacun d'eux au moyen de l'équation de condition

$$\text{Cos.}^2\alpha+\text{Cos.}^2\beta+\text{Cos.}^2\gamma=1.$$

PROBLÈME. Soient trois plans (non parallèles deux à deux) donnés de position. Sur ces plans, soient trois figures données de grandeur. On demande la direction du plan sur lequel, ces trois figures étant projetées orthographiquement, les rapports de leurs projections soient donnés ?

Solution. Du point de section des plans donnés soient élevées à ces plans des perpendiculaires respectivement proportionnelles aux figures données de grandeur qui y sont tracées. Par ce même point soit mené (*lemme*) le plan dont les distances aux extrémités de ces perpendiculaires soient respectivement dans le rapport des projections des figures données. Ce plan (ainsi que tout plan qui lui sera parallèle) pourra être pris pour le plan demandé.

Solution du dernier des deux problèmes proposés à la page 64 de ce volume;

Par M. PILATTE, professeur de mathématiques spéciales au lycée d'Angers.



MONTUCLA, qui a considéré un cas particulier de ce problème, dans l'édition qu'il a donnée des récréations mathématiques d'*Ozanam*,

le regarde si non comme impossible, du moins comme très-difficile à résoudre, par des considérations purement géométriques. Il paraît qu'en le proposant, dans les *Annales*, on n'a eu en vue que les polygones plans ; je vais le généraliser un peu, en étendant son énoncé à un polygone gauche.

PROBLÈME. Soient divisés, dans le même sens, tous les côtés d'un polygone donné P, *plan ou gauche, de* m *côtés, en deux parties qui soient entre elles dans le rapport de deux nombres donnés* p *et* q. *Si l'on joint les points de division consécutifs par des droites, ces droites formeront un nouveau polygone* P′, *plan ou gauche, aussi de* m *côtés. Opérant sur celui-ci comme sur le premier, on obtiendra un troisième polygone* P″ *duquel on pourra déduire, par un semblable procédé, un quatrième polygone* P‴ ; *et ainsi de suite.*

Les côtés de ces polygones décroissant continuellement, si l'on poursuit l'opération à l'infini, le dernier polygone se réduira nécessairement à un point. On demande de déterminer la situation de ce point, relativement au polygone primitif P ?

Solution. Soit rapporté le polygone proposé à trois plans rectangulaires quelconques ; soient S_1, S_2, S_3, ... S_{m-2}, S_{m-1}, S_m, les sommets consécutifs du polygone P ; soient S'_1, S'_2, S'_3, ... S'_{m-2}, S'_{m-1}, S'_m, ceux du polygone P', et ainsi de suite. Supposons de plus que S'_1 soit entre S_1 et S_2 ; que S'_2 soit entre S_2 et S_3 ; et ainsi de suite ; et soient les coordonnées de ces différens sommets ainsi qu'il suit :

$$\text{pour } S_1\left\{\begin{array}{l}a_1,\\b_1,\\c_1;\end{array}\right.\ \text{pour } S_2\left\{\begin{array}{l}a_2,\\b_2,\\c_2;\end{array}\right.\ \ldots\text{pour } S_{m-1}\left\{\begin{array}{l}a_{m-1},\\b_{m-1},\\c_{m-1};\end{array}\right.\ \text{pour } S_m\left\{\begin{array}{l}a_m,\\b_m,\\c_m;\end{array}\right.$$

$$\text{pour } S'_1\left\{\begin{array}{l}a'_1,\\b'_1,\\c'_1;\end{array}\right.\ \text{pour } S'_2\left\{\begin{array}{l}a'_2,\\b'_2,\\c'_2;\end{array}\right.\ \ldots\text{pour } S'_{m-1}\left\{\begin{array}{l}a'_{m-1},\\b'_{m-1},\\c'_{m-1};\end{array}\right.\ \text{pour } S'_m\left\{\begin{array}{l}a'_m,\\b'_m,\\c'_m.\end{array}\right.$$

....

on trouvera facilement, d'après cela ;

$$c'_1=\frac{qc_1+pc_2}{p+q},$$

$$c'_2=\frac{qc_2+pc_3}{p+q},$$

$$c'_3=\frac{qc_3+pc_4}{p+q},$$

....

$$c'_{m-2}=\frac{qc_{m-2}+pc_{m-1}}{p+q},$$

$$c'_{m-1}=\frac{qc_{m-1}+pc_m}{p+q},$$

$$c'_m=\frac{qc_m+pc_1}{p+q};$$

prenant alors la somme de ces valeurs, il viendra, en réduisant et exécutant la division,

$$c'_1+c'_2+c'_3+\ldots+c'_{m-2}+c'_{m-1}+c'_m=c_1+c_2+c_3+\ldots+c_{m-2}+c_{m-1}+c_m.$$

Ainsi la somme des distances des sommets du polygone P' au plan des xy, c'est-à-dire à un plan quelconque, est égale à la somme des distances des sommets du polygone P au même plan.

La vérité de cette proposition peut au surplus être aperçue sans calcul. Que l'on conçoive en effet des masses égales entre elles, et représentées par $p+q$, appliquées aux sommets S_1, S_2, S_3, ... du polygone P, on pourra composer en une seule la portion p de la masse appliquée à chacun de ces sommets avec la portion q de la masse appliquée au sommet suivant ; en procédant ainsi, on aura substitué aux m masses $p+q$, appliquées en S_1, S_2, S_3, ..., m nouvelles

masses, aussi égales à $p+q$, lesquelles se trouveront précisément appliquées aux points S'_1, S'_2, S'_3,.... Ainsi la somme des momens de ces derniers points par rapport à un plan quelconque sera égale à la somme des momens des premiers par rapport au même plan. Otant donc de ces sommes égales le facteur commun $p+q$, on en conclura que la somme des distances de ces derniers points à un plan quelconque est égale à la somme des distances des premiers au même plan. C'est à peu près de cette manière que *Montucla* traite le cas particulier qu'il considère. (*)

Il suit de là généralement que la somme des distances des sommets de chacun des polygones P', P'', P''',..... à un même plan quelconque est une quantité constante et égale à la somme des distances des sommets du polygone P au même plan; il en sera donc de même pour le dernier polygone; et comme ce dernier polygone se réduira à un seul point, la somme des distances de ses sommets à un plan quelconque ne sera autre chose que m fois sa distance à ce plan.

Ainsi la distance du point cherché à un plan quelconque n'est autre chose que la m.^{eme} partie de la somme des distances des sommets du polygone donné au même plan; ou en d'autres termes :

Le point demandé n'est autre que le centre de gravité ou le centre des moyennes distances des sommets du polygone proposé.

Il est aisé de voir que cette proposition aurait également lieu si les nombres p et q, au lieu d'être constants, variaient d'une manière quelconque d'un polygone à l'autre.

(*) Pendant que ceci s'imprimait, les rédacteurs des *Annales* ont reçu de M. Fauquier, élève de l'école polytechnique, une solution fondée sur cette considération.

(*Note des éditeurs.*)

ASTRONOMIE.

Ephémérides abrégées de la comète de 1811; dressées pour le méridien de Paris, d'après les élémens calculés par M. Burckhardt;

Par M. Gergonne.



La première colonne de ces éphémérides indique, en temps solaire vrai, les époques pour lesquelles les positions de la comète sont calculées; elles embrassent un intervalle de plus de 13 mois et un mouvement en anomalie de 220 degrés dont 110 avant et 110 après le périhélie.

Les 2.e et 3.e colonnes indiquent, pour les mêmes époques, les distances de la comète tant au soleil qu'à la terre; la moyenne distance du soleil à la terre étant prise pour unité. Ainsi, les nombres renfermés dans ces deux colonnes étant multipliés par 30 680 097 deviendront des distances en lieues métriques de 5 kilomètres.

Les quatre colonnes qui suivent donnent, toujours pour les mêmes époques, les longitudes et latitudes géocentriques, ainsi que les ascensions droites et déclinaisons de la comète. Elles pourront servir à tracer la route de cet astre sur les cartes célestes.

On trouve, dans les trois colonnes qui viennent après, les heures en temps vrai, du lever apparent, du passage au méridien et du coucher apparent de la comète, vers les époques portées à la première colonne. Ces indications pourront aider à retrouver l'astre, dans cette saison pluvieuse, où on risque de le perdre souvent de vue pendant plusieurs jours consécutifs.

Les deux dernières colonnes n'ont besoin d'aucune explication.

J'ai mesuré, le 6 au soir, la queue de la comète; je l'ai trouvée de plus de 10.° ce qui, eu égard à sa position oblique et à la distance qui nous en sépare, indique une longueur absolue de plus de dix millions de lieues ou 150 fois la distance qui nous sépare de la lune.

Nismes, le 9 d'octobre 1811.

Époques en temps vrai, pour le méridien de Paris.		H. M.		Distance au soleil.	Distance à la terre.	Longitudes géocentriq. D. M.	Latitudes géocentriques. D. M.	Ascensions droites. D. M.	Déclinaison D. M.
1811	21 Février. . à	11. 53.	soir.	3,11	2,46	159. 34.	−56. 56.	135. 10.	−43. [illegible]
	16 Avril. . . à	4. 2.	soir.	2,47	2,16	123. 3.	−37. 40.	116. 53.	−17. [illegible]
	22 Mai . . . à	2. 10.	soir.	2,04	2,32	120. 6.	−19. 59.	118. 7.	+ 0. [illegible]
	16 Juin . . . à	8. 32.	soir.	1,74	2,41	122. 45.	− 9. 37.	122. 49.	+10. [illegible]
	5 Juillet . . à	4. 3.	soir.	1,52	2,40	126. 1.	− 2. 25.	127. 46.	+16. [illegible]
	20 Juillet . . à	9. 11.	ma.	1,36	2,33	129. 8.	+ 3. 21.	132. 31.	+21. [illegible]
	1 Août . . à	9. 36.	ma.	1,24	2,20	132. 0.	+ 9. 12.	137. 19.	+26. [illegible]
	11 Août . . à	2. 32.	soir.	1,16	2,12	140. 58.	+13. 15.	148. 5.	+27. [illegible]
	20 Août . . à	2. 7.	soir.	1,10	2,01	142. 34.	+17. 50.	151. 36.	+30. [illegible]
	28 Août . . à	6. 23.	soir.	1,05	1,86	141. 2.	+22. 58.	152. 18.	+36. [illegible]
	7 Septembre à	10. 54.	ma.	1,03	1,72	144. 45.	+29. 0.	158. 54.	+39. [illegible]
	12 Septembre à	9. 52.	soir.	1,02	1,59	148. 53.	+34. 8.	166. 34.	+43. [illegible]
	20 Septembre à	8. 49.	ma.	1,03	1,46	155. 56.	+40. 59.	178. 3.	+46. [illegible]
	28 Septembre à	1. 21.	ma.	1,05	1,34	165. 51.	+48. 40.	193. 15.	+48. [illegible]
	6 Octobre . à	5. 38.	ma.	1,10	1,25	182. 53.	+56. 43	213. 10.	+49. [illegible]
	15 Octobre . à	5. 14.	ma.	1,16	1,20	212. 57.	+61. 59.	236. 4.	+45. [illegible]
	25 Octobre . à	10. 10.	ma.	1,24	1,25	250. 9.	+58. 49.	257. 25.	+36. [illegible]
	6 Novembre à	10. 35.	ma.	1,36	1,42	275. 49.	+47. 49.	274. 18.	+24. [illegible]
	21 Novembre à	3. 43.	ma.	1,52	1,73	291. 47.	+35. 52.	288. 2.	+13. [illegible]
	9 Décembre à	11. 12.	soir.	1,74	2,19	302. 50.	+25. 10.	299. 32.	+ 5. [illegible]
1812	4 Janvier . à	5. 25.	ma.	2,04	2,79	312. 39.	+16. 33.	310. 32.	− 1. [illegible]
	9 Février . à	3. 19.	ma.	2,47	3,44	322. 56.	+ 9. 34.	322. 6.	− 4. [illegible]
	24 Mars. . . à	7. 23.	soir.	3,11	3,90	331. 23.	+ 3. 2.	332. 20.	− 8. [illegible]

Heure lever apparent.	Heure du passage au méridien.	Heure du coucher apparent.	Constellations où l'on voit la Comète.	PRINCIPAUX PHÉNOMÈNES.
H. M.	H. M.	H. M.		
......	10. 43. soir.	......	Le Navire.	M. Flaugergues a aperçu la Comète à Vivier, le 25 mars.
1. 38. soir.	6. 12. soir.	10. 47. soir.	Le Navire.	
}. 53. ma.	3. 58. soir.	10. 5. soir.	Le Petit-Chien.	Passage à l'équateur.
. 41. ma.	2. 36. soir.	9. 30. soir.	Le Cancer.	
. 8. ma.	1. 37. soir.	9. 5. soir.	Le Cancer.	
. 1. ma.	0. 59. soir.	8. 56. soir.	Le Cancer.	Passage à l'écliptique, près de l'orbe de Mars.
. 59. ma.	0. 30. soir.	9. 2. soir.	Le Lion.	
. 52. ma.	0. 31. soir.	9. 10. soir.	Le Lion.	
. 19. ma.	0. 11. soir.	9. 9. soir.	Le Lion.	
. 26. ma.	11. 41. ma.	10. 3. soir.	Le Petit-Lion.	
rant cet	11. 34. ma.	*Durant cet*	La Grande-Ourse.	
tervalle,	11. 44. ma.	*intervalle,*	La Grande-Ourse.	Moindre distance au Soleil.
comète	0. 8. soir.	*la comète*	La Grande-Ourse.	
quittera	0. 40. soir.	*ne quittera*	La Grande-Ourse.	
l'horison	1. 31. soir.	*pas l'horison*	Le Bouvier.	
Paris.	2. 30. soir.	*de Paris.*	Hercule.	Moindre distance à la Terre.
56. ma.	3. 16. soir.	1. 39. ma.	Hercule.	
17. ma.	3. 37. soir.	0. 0. ma.	Le Rameau.	
29. ma.	3. 31. soir.	10. 46. soir.	L'Aigle.	Passage par α de l'AIGLE du 2 au 3 décembre.
27. ma.	2. 56. soir.	9. 26. soir.	L'Aigle.	
6. ma.	1. 49. soir.	7. 44. soir.	Le Petit-Cheval.	Passage à l'équateur.
11. ma.	0. 4. soir.	5. 47. soir.	Le Verseau.	
3. ma.	9. 52. ma.	3. 19. soir.	Le Verseau.	

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème d'hydrodynamique.

On suppose qu'une cuve cylindrique dont l'axe est vertical, et qui est remplie d'eau jusqu'à une certaine hauteur connue, est percée latéralement, et dans toute sa hauteur, d'une fente parallèle à son axe, par laquelle l'eau s'écoule.

On suppose que l'eau évacuée de cette cuve tombe dans une autre cuve de même forme et de dimensions connues, percée aussi latéralement comme la première.

On suppose que la quantité d'eau qui s'écoule par chacun des points de chacune des cuves pendant le même temps est constante et indépendante de la pression exercée par la colonne supérieure, et que cette quantité est connue pour l'une et l'autre cuves.

Cela posé, on propose 1.° de déterminer la hauteur de l'eau, dans l'une et l'autre cuves au bout du temps t; 2.° de déterminer le *maximum* de hauteur de l'eau dans la seconde cuve et l'époque à laquelle ce *maximum* aura lieu?

On peut ensuite supposer que l'une ou l'autre cuves, ou toutes les deux sont des troncs de cônes droits ou obliques.

Théorème de Géométrie.

Si, par l'un quelconque P des points du périmètre d'une hyperbole, ou mène deux droites PA, PB, respectivement parallèles à ses asymptotes, et que, par un autre point quelconque M, pris sur ce périmètre, on mène une suite de droites coupant PA en a, a', a'', ..., PB en b, b', b'', ..., et la courbe en m, m', m'', ...; on aura $\frac{am}{bm}=\frac{a'm'}{b'm'}=\frac{a''m''}{b''m''}=....=$ *constante.*

GÉOMÉTRIE.

Lettre aux rédacteurs des Annales, *renfermant quelques remarques sur le problème de l'inscription de trois cercles à un triangle;*

Par M. Tédenat, correspondant de la première classe de l'Institut, recteur de l'académie de Nismes.

Messieurs,

Le silence de M. Bidone, ou plutôt celui de Malfatti lui-même, sur la nature des considérations qui ont pu le conduire à l'élégant résultat que vous avez fait connaître aux pages 347 et 348 du 1.er volume des *Annales*, m'a entraîné à quelques recherches sur ce curieux problème. A la vérité la solution en est maintenant connue, et vous avez prouvé, Messieurs, à la page 60 du 2.me volume, qu'elle est exacte; mais, faute de savoir par quelle route on y parvient, cette solution ne peut être considérée que comme un théorème dont on peut raisonnablement désirer une démonstration simple comme son énoncé. Si le peu de temps qu'il m'est permis de consacrer à la géométrie ne me laisse guère d'espoir de parvenir à une pareille démonstration, je pense que du moins les réflexions que j'ai faites à ce sujet, pourront aider dans sa recherche ceux de vos lecteurs qui ont tout le loisir nécessaire pour s'en occuper.

Suivant Malfatti, si R est le rayon du cercle inscrit à un triangle; ρ, ρ', ρ'', les distances de ses sommets aux points où ce cercle touche

ses côtés ; d, d', d'', les distances de ces mêmes sommets au centre du cercle ; r, r', r'', les rayons de trois cercles inscrits, de manière que chacun touche les deux autres et deux côtés du triangle ; et enfin s la demi-somme des trois côtés de ce triangle, on doit avoir

$$\left.\begin{aligned} 2\rho\,r &= R(s-R+d-d'-d'')\,, \\ 2\rho' r' &= R(s-R+d'-d''-d)\,, \\ 2\rho'' r'' &= R(s-R+d''-d-d')\,; \end{aligned}\right\}\quad (A)$$

en ajoutant ces équations deux à deux, et supprimant le facteur 2 dans les équations résultantes, il vient

$$\left.\begin{aligned} \rho\,r+\rho' r' &= R(s-R-d'')\,, \\ \rho' r'+\rho'' r'' &= R(s-R-d)\,, \\ \rho'' r''+\rho\,r &= R(s-R-d')\,. \end{aligned}\right\}\quad (B)$$

Mais, c, c', c'', étant les côtés du triangle, on a aussi (tome I.er, page 344) les équations

$$\left.\begin{aligned} \rho\,r+2R\sqrt{r\,r'}+\rho' r' &= Rc''\,, \\ \rho' r'+2R\sqrt{r' r''}+\rho'' r'' &= Rc\,, \\ \rho'' r''+2R\sqrt{r'' r}+\rho\,r &= Rc'\,. \end{aligned}\right\}\quad (C)$$

Retranchant de chacune de celles-ci sa correspondante parmi les équations (B), et divisant par R les deux membres des équations résultantes, en se rappelant que $s-c$, $s-c'$, $s-c''$, sont respectivement égaux à ρ, ρ', ρ'', on obtient

$$\left.\begin{aligned} 2\sqrt{r\,r'} &= d''+R-\rho''\,, \\ 2\sqrt{r' r''} &= d+R-\rho\,, \\ 2\sqrt{r'' r} &= d'+R-\rho'\,. \end{aligned}\right\}\quad (D)$$

Cela posé, soient $pp'p''$ (fig. 1) le triangle dont il s'agit ; C le centre du cercle inscrit ; t, t', t'', les points de contact de ce cercle avec ses côtés ; $tk''t'$, $t'kt''$, $t''k't$, des arcs décrits des sommets comme centres et avec leurs distances respectives aux points t, t', t'', pour rayons ; soient enfin o, o', o'', les centres des cercles dont les

rayons respectifs sont r, r', r'', et soient m, n, m', n', m'', n'', les points de contact de ces cercles avec les côtés du triangle. Soient enfin q, q', q'', les points où pC, $p'C$, $p''C$, prolongés au-delà du point C, rencontrent la circonférence du cercle inscrit.

Il a déjà été démontré, et il est d'ailleurs facile de s'assurer immédiatement que

$$\left.\begin{aligned} 2\sqrt{rr'}&=m'n\ , \\ 2\sqrt{r'r''}&=m''n'\ , \\ 2\sqrt{r''r}&=mn''\ . \end{aligned}\right\} \quad (E)$$

D'un autre côté, il est aisé de voir que

$$\left.\begin{aligned} d+R-\rho&=pc+cq-pk=kq\ , \\ d'+R-\rho'&=p'c+cq'-p'k'=k'q'\ , \\ d''+R-\rho''&=p''c+cq''-p''k''=k''q''\ ; \end{aligned}\right\} \quad (F)$$

d'où il suit que les équations (D) reviennent à celles-ci

$$\left.\begin{aligned} m''n'&=kq\ , \\ mn''&=k'q'\ , \\ m'n&=k''q''\ ; \end{aligned}\right\} \quad (G)$$

lesquelles présentent un théorème fort remarquable.

Posons pour abréger,

$$\left.\begin{aligned} kq&=d+R-\rho=a\ , \\ k'q'&=d'+R-\rho'=a'\ , \\ k''q''&=d''+R-\rho''=a''\ ; \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{aligned} 2\sqrt{r'r''}&=a\ , \\ 2\sqrt{r''r}&=a'\ , \\ 2\sqrt{rr'}&=a''\ . \end{aligned}\right. \quad (H)$$

En prenant le produit de ces dernières équations, il viendra

$$2r.2r'.2r''=aa'a''\ ;$$

c'est-à-dire, que le parallélipipède construit sur les diamètres des trois cercles cherchés est équivalant au parallélipipède construit sur les trois longueurs connues kq, $k'q'$, $k''q''$.

Si, au contraire, on divise successivement par chacune des équations (H) le produit des deux autres, il viendra

$$r=\frac{a'a''}{2a}, \quad r'=\frac{a''a}{2a'}, \quad r''=\frac{aa'}{2a''}; \qquad (K)$$

valeurs incomparablement plus simples, et peut-être tout aussi faciles à construire que celles de Malfatti ; puisque les longueurs a, a', a'', sont données immédiatement par la construction de la figure (*).

Si l'on suppose admises les équations (G) ou, ce qui revient au même, les équations (D); les équations (C) du problème deviendront les équations (B) ; et en retranchant successivement chacune de ces dernières de la somme des deux autres, on en déduira les formules (A) de Malfatti. Le problème ne sera ainsi que du premier degré.

On voit donc combien la solution de ce problème deviendrait facile, si l'on pouvait parvenir à démontrer, *a priori*, que les droites kq, $k'q'$, $k''q''$, sont respectivement égales aux droites $m''n'$, mn'', $m'n$; ou simplement que $kq=m''n'$; c'est sur ce point capital que j'ai cru, Messieurs, devoir appeler l'attention de vos lecteurs.

(*) Nous placerons ici une remarque qui peut souvent être d'une utile application. Le problème dont il s'agit ici, s'élève naturellement au 8.e ou tout au moins au 4.e degré, du moins tant qu'on n'emploie d'autres données que les trois côtés du triangle proposé. Voilà pourtant des valeurs rationnelles extrêmement simples ; mais, sous leur simplicité apparente, elles renferment implicitement les diverses solutions qu'en général le problème peut admettre. Les quantités a, a', a'' sont en effet des fonctions de R, d, d', d'', ρ, ρ', ρ'', et ces dernières prennent diverses valeurs suivant qu'on les rapporte au cercle *inscrit*, proprement dit, ou qu'on les considère par rapport à chacun des trois cercles *exinscrits*.

Il en doit toujours être de même ; c'est-à-dire, qu'en général un problème susceptible d'un grand nombre de solutions, ne peut être que d'un degré élevé, tant qu'on n'y emploie que des données invariables ; et qu'on ne doit espérer de l'abaisser à un degré inférieur, qu'en substituant à ces données d'autres données dont les valeurs ne soient pas les mêmes pour les diverses solutions dont ce problème est susceptible.

Il a souvent été remarqué qu'un heureux choix d'inconnues pouvait simplifier d'une manière notable la solution des problèmes ; mais il n'avait pas été observé jusqu'ici, que des données choisies convenablement peuvent procurer le même avantage.

(*Note des éditeurs.*)

On pourrait parvenir à s'assurer de l'exactitude des valeurs que j'ai assignées à r, r', r'', en posant

$$2\sqrt{rr'}=\lambda''(R+d''-\rho'') ,$$

$$2\sqrt{r'r''}=\lambda\ (R+d\ -\rho\ ) ,$$

$$2\sqrt{r''r}=\lambda'\ (R+d\ -\rho'\ ) ;$$

et prouvant, par la substitution dans les équations du problème qu'on doit avoir $\lambda=\lambda'=\lambda''=1$; mais, outre que cette vérité ne pourrait être mise en évidence que par un calcul assez prolixe ; il resterait toujours à savoir ce qui a pu conduire à poser les équations ci-dessus, de manière qu'on ne ferait par là que reproduire, sous une autre forme, la vérification que vous avez présentée vous-mêmes, Messieurs, à la page 61 du tome II de votre recueil.

Je n'ajouterai plus qu'un mot : d'après les valeurs que j'ai assignées ci-dessus à r, r', r'', on a

$$\frac{r'}{r}=\frac{a^2}{a'^2} , \quad \frac{r''}{r}=\frac{a^2}{a''^2} ,$$

mais, à la page 346 du tome I, vous avez fait, Messieurs,

$$r'=rx'^2 , \quad r''=rx''^2 ,$$

d'où

$$\frac{r'}{r}=x'^2 , \quad \frac{r''}{r}=x''^2 ;$$

donc

$$x'=\frac{a}{a'}=\frac{R+d-\rho}{R+d'-\rho'} , \quad x''=\frac{a}{a''}=\frac{R+d-\rho}{R+d''-\rho''} ;$$

ce qui donne

$$\frac{x'}{x''}=\frac{R+d''-\rho''}{R+d'-\rho'} ;$$

mais, d'après les valeurs que vous avez trouvées pour x', x'', à l'endroit cité, on a

$$\frac{x'}{x''}=\frac{d''}{d'}\cdot\frac{c''-d+d'}{c'-d+d''}\ ;$$

donc

$$d'(c'-d+d'')(R+d''+r'')=d''(c''-d+d')(R+d'-r').$$

En permutant convenablement les accens, on aura donc, entre les données du problème, les relations suivantes

$$d\ (c\ -d''+d'\ )(R+d'\ -r'\ )=d'\ (c'\ -d''+d\ )(R+d\ -r\ )\ ,$$

$$d'\ (c'\ -d\ +d'')(R+d''-r'')=d''(c''-d\ +d'\ )(R+d'\ -r'\ )\ ,$$

$$d''(c''-d'\ +d\ )(R+d\ -r\ )=d\ (c\ -d'\ +d'')(R+d''-r'')\ ;$$

relations qu'il doit être facile de vérifier.

Agréez, Messieurs, etc.

Nismes, le 18 d'octobre 1811.

ASTRONOMIE.

Elémens elliptiques de la Comète de 1811;

Par M. FLAUGERGUES, astronome correspondant de l'Institut.



LA comète que je découvris, le 25 mars dernier, et qui, dans ce moment, occupe l'attention des astronomes et du public, me semble

être la même que celle qui parut au mois de septembre 1301, et qui fut remarquée par toute l'Europe et observée en Chine. En effet, les élémens de la comète actuelle représentent très-bien les observations des astronomes chinois sur la comète de 1301, pourvu qu'on suppose seulement que, lorsqu'ils disent que la comète passa de la constellation *Tsing* à *Nan-ho* (Procion), ils entendent qu'elle fut en conjonction avec cette étoile, et qu'on admette, en outre, que les trois *Koung* qu'ils remarquèrent qu'elle traversa, ne sont pas trois étoiles de la constellation des Chiens-de-Chasse, au sud de la queue de la Grande Ourse, comme le prétend M. Pingré, d'après le père Gaubil, (puisqu'il ne se trouve à la tête d'Astérion, que deux étoiles de cinquième grandeur qui n'ont rien de singulier) mais plutôt trois étoiles voisines θ, ι, κ, à la main du Bouvier, qui sont de quatrième grandeur, et qui forment dans le ciel un petit triangle fort remarquable. L'apparition de cette comète ne dura, suivant ces astronomes, que quarante-six jours; mais il y a apparence qu'ils n'ont entendu parler que de la durée de son plus grand éclat ou du temps qu'elle employa à parcourir les constellations que je viens de désigner; car les historiens d'Europe donnent à son apparition une durée bien plus longue, et Villani, en particulier, assure l'avoir encore vue au mois de janvier 1302; ce qui s'accorde fort bien avec l'hypothèse que cette comète est la même que celle de cette année 1811, dont la période serait ainsi d'environ 510 années, de sorte qu'elle pourrait reparaître en l'année 2321.

Cette conjecture est encore confirmée par l'apparition d'une comète, dans le signe de la Vierge, 510 ans avant l'année 1301, c'est-à-dire en 791, suivant Eckstormius, Lubinietzki, Zahn, etc.

Dans cette supposition d'une période d'environ 510 ans, et d'après mes observations, j'ai calculé des *Élémens elliptiques* de la comète de cette année (1811) qui représentent les observations avec une précision singulière; ce qui fournit une nouvelle preuve de l'identité de cette comète avec celle de 1301. Voici ces élémens.

Révolution périodique	années 509, 8846	
Grand axe	127,6442,	La moyenne distance du soleil à la terre étant prise pour unité.
Petit axe.	22,8084,	
Distance aphélie	126,6170,	
Distance périhélie . . .	1,0272.	

Rapport de l'excentricité au demi-grand axe . 0,9839

Nœud ascendant. . . . . 140° 16′ 56″
Inclinaison . . . . 72° 59′ 10″
Longitude du périhélie sur l'orbite . 74° 29′ 40″
Passage au périhélie . . . . 12 septembre 1811, à 6h. 57′ 30″ du soir, temps moyen à Paris.
Sens du mouvement . . . . rétrograde (*)

La queue de la comète de 1301, avait de dix à douze degrés de longueur, comme la queue de la comète actuelle.

A l'observatoire de Viviers, le 10 d'octobre 1811.

(*) En prenant pour unité la lieue métrique de 5 kilomètres, on parviendra aux résultats que voici :

Grand axe	3 916 136 438 lieues.
Petit axe	699 763 924 lieues.
Distance aphélie	3 884 621 842 lieues.
Distance périhélie	31 514 596 lieues.

On trouvera aussi, d'après les lois de la gravitation, que les vitesse aphélie et périhélie sont telles qu'il suit :

Vitesse aphélie, environ 249 lieues	par heure.
Vitesse périhélie, environ 30684 lieues	

(*Note des éditeurs.*)

très-

GÉOMÉTRIE.

Lieu aux sections coniques, relatif au problème traité à la page 302 *du premier volume des* Annales.

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

Le problème proposé à la page 232 du I.er volume des *Annales*, relativement à deux canaux rectilignes, a été discuté, d'une manière très-intéressante par M. Tédenat, à la page 302 du même volume. Cette discussion m'a engagé à présenter la question sous un autre point de vue, et à rechercher le lieu des points de chacun desquels abaissant des perpendiculaires sur deux droites données de position, et menant une droite à un point donné, la somme de ces perpendiculaires et de cette droite soit d'une grandeur constante.

Lemme. Soient deux droites données de position, et soient deux droites correspondantes données de grandeur. D'un point quelconque, pris sur le plan de ces droites, soient abaissées sur elles des perpendiculaires. Soient pris les rectangles de ces perpendiculaires par les droites correspondantes données de grandeur, et soit prise la somme de ces rectangles.

On peut substituer à cette somme le rectangle de la perpendiculaire abaissée du même point sur une droite à déterminer de position par une droite à déterminer de grandeur de la manière suivante :

Soient SA et SA′ (fig. 2) deux droites données de grandeur et de position qui se coupent en S. Soit prolongée A′S au-delà de S d'une quantité Sa′=SA′; soit menée Aa′, et soit coupée cette droite en deux parties égales au point Z; enfin soit menée SZ, cette dernière droite

sera la droite à déterminer de position, et son double sera la droite à déterminer de grandeur ; c'est-à-dire, que, si d'un point quelconque M on abaisse sur SA, SA′, SZ, les perpendiculaires MP, MP′, MR, on a l'équation $SA \times MP + SA' \times MP' = 2SZ \times MR$. (*)

En particulier, si les droites SA et SA′ sont égales entre elles, la droite SZ coupe en deux parties égales l'angle AS*a*′, et elle est perpendiculaire à la droite qui coupe en deux parties égales l'angle ASA′. L'expression de SZ est alors $SA.Sin.\frac{1}{2}S$, et on a $MP + MP' = 2MR.Sin.\frac{1}{2}S$.

Cette proposition n'est qu'un cas particulier d'une propriété générale du centre des moyennes distances, que j'ai développée dans mes *Élémens d'analise*, *etc.*, pag. 52-59.

Application. Soient deux droites qui se coupent données de position, et soit un point donné de position. On propose de trouver le lieu des points de chacun desquels abaissant des perpendiculaires sur les droites données de position, et menant une droite au point donné, la somme de ces perpendiculaires et de cette droite soit donnée de grandeur.

Soient SA et SA′ (fig. 3) deux droites données de position, se coupant en S. Soit C un point donné de position. Soit M un point duquel on abaisse sur SA et SA′ les perpendiculaires MP, MP′, et on mène la droite MC. Que la somme $MP + MP' + MC$ soit donnée de grandeur ; on demande le lieu du point M ?

Par le point S soit menée la droite SZ qui divise en deux parties égales l'angle de suite de l'angle A′SA. Soit aussi MR perpendiculaire à SZ. Par le lemme précédent $MP + MP' = 2MR.Sin.\frac{1}{2}S$; donc la somme $2MR.Sin.\frac{1}{2}S + MC$ est donnée de grandeur. Soit SD la

(*) En effet, en prolongeant SZ d'une quantité ZS′=ZS, et menant S′A et S′A′, la figure SAS′a′ sera un parallèlogramme, et conséquemment SS′ pourra être considérée comme représentant en grandeur et en direction la résultante de deux forces, représentées en grandeur et en direction par SA et Sa′. Alors, en considérant le point M comme le centre des momens, on devra avoir en effet l'équation ci-dessus.

(*Note des éditeurs.*)

droite qui divise en deux parties égales l'angle ASA′, et sur SD soient abaissées les perpendiculaires CB et MQ.

Première supposition. Que la somme donnée soit $2SB.Sin.\frac{1}{2}S$. On aura $2MR.Sin.\frac{1}{2}S+MC=2SB.Sin.\frac{1}{2}S$ d'où $MC=2(SB-MR).Sin.\frac{1}{2}S$ $=2(SB-QS).Sin.\frac{1}{2}S=2BQ.Sin.\frac{1}{2}S$.

1.° Soit $2Sin.\frac{1}{2}S=1$; ou que l'angle S vaille le tiers de deux droits (fig. 3); on aura $MC=BQ$; partant le lieu du point M est une droite donnée de position, menée par C parallèlement à celle qui divise l'angle A′SA en deux parties égales.

2.° Puisque MC. (fig. 4) n'est pas plus petit que BQ; $2Sin.\frac{1}{2}S$ n'est pas plus petit que l'unité, et partant l'angle S ne peut pas être plus petit que le tiers de deux droits. Soit donc $2Sin.\frac{1}{2}S>1$; on a $MC:BQ=2Sin.\frac{1}{2}S:1$. Le lieu des points M est donc une droite menée par C et rencontrant SB sous un angle dont le cosinus est $\frac{1}{2Sin.\frac{1}{2}S}$.

Seconde supposition. Que la somme donnée soit différente de $2SB.Sin.\frac{1}{2}S$; soit cette somme égale à $2SD.Sin.\frac{1}{2}S$.

Puisque $2MR.Sin.\frac{1}{2}S+MC=2SD.Sin.\frac{1}{2}S$,

on aura $MC=2DQ.Sin.\frac{1}{2}S$,

ou $MC:DQ=2Sin.\frac{1}{2}S:1$.

1.° Soient $2Sin.\frac{1}{2}S=1$; on aura $MC=DQ$. Ainsi le lieu des points M est alors une parabole dont C est le foyer, et dont la directrice est la perpendiculaire élevée du point D à la droite SB.

2.° Soit $2Sin.\frac{1}{2}S<1$; on aura aussi $MC<DQ$; et le rapport de MC à DQ sera un rapport constant. Le lieu des points M sera donc alors une ellipse ayant le point C pour un de ses foyers et dont la directrice correspondant à ce foyer sera la perpendiculaire élevée du point D à la droite SB.

3.° Soit enfin $2Sin.\frac{1}{2}S>1$; on aura aussi $MC>DQ$, et en rapport constant. Le lieu des points M sera donc une hyperbole dont le point C sera l'un des foyers et dont la directrice correspondant à ce foyer sera la perpendiculaire élevée du point D à la droite SB.

Remarque I. On peut substituer aux droites dont on prend la somme, la somme de leurs rectangles par des droites données.

Remarque II. On peut aussi généraliser cette recherche, et l'étendre à un nombre quelconque de droites données de position, qui partent ou non d'un même point ; vu que le lemme sur lequel la proposition repose, s'étend à un nombre quelconque de droites données de position sur un plan.

Remarque III. Aux droites données de position sur un plan, on peut substituer des plans donnés de position, qui se coupent ou non en un même point ; vu que le lemme sur lequel la proposition est fondée, s'étend à des plans donnés de position. (Voyez l'ouvrage déjà cité, pag. 150–155). Le lieu cherché dans l'espace est un plan ou une surface de révolution du second ordre.

Remarque IV. Comme la comparaison des méthodes est un des points les plus importans dans les sciences de raisonnement, je crois devoir ajouter ici le procédé fondé sur la doctrine des coordonnées.

Que les équations des droites données soient,

$$x\text{Cos.}\alpha+y\text{Sin.}\alpha=d, \qquad x\text{Cos.}\alpha'+y\text{Sin.}\alpha'=d';$$

que les coordonnées du point donné soient a et b;
que les coordonnées du point cherché soient x et y.

Les perpendiculaires abaissées du point cherché sur les droites données sont,

$$x\text{Cos.}\alpha+y\text{Sin.}\alpha-d, \qquad x\text{Cos.}\alpha'+y\text{Sin.}\alpha'-d';$$

La distance du point donné au point cherché est

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2};$$

soit enfin $s-(d+d')$ la somme constante donnée, l'équation du lieu géométrique des points M sera

$$x(\text{Cos.}\alpha+\text{Cos.}\alpha')+y(\text{Sin.}\alpha+\text{Sin.}\alpha')+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=s.$$

Si l'on désigne par φ l'angle des deux droites données, cette équation deviendra

$$2x\,\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\varphi.\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')+2y\,\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\varphi.\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=s\,;$$

d'où on conclura, en transposant et quarrant

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\left\{\begin{array}{l} s^2-4sx\,\mathrm{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\varphi.\mathrm{Cos.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha') \\ -4sy\,\mathrm{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\varphi.\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha') \\ +8xy\,\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha') \\ +4x^2\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha') \\ +4y^2.\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')\,; \end{array}\right.$$

ou en développant et ordonnant

$$\left.\begin{array}{l} x^2\left\{4\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')-1\right\} \\ +8xy\,\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha').\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha') \\ +\,y^2\left\{4\mathrm{Cos.}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\mathrm{Sin.}^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')-1\right\} \\ -2x\left\{a-2s.\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\varphi.\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')\right\} \\ -2y\left\{b-2s.\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\varphi.\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')\right\} \end{array}\right\}=S^2-(a^2+b^2).$$

Remarque V. Que le point cherché doive être situé sur la circonférence d'un cercle donné dont le point donné est le centre ; la somme des perpendiculaires abaissées du point cherché sur les droites données de position sera susceptible de limites, soit en grandeur, soit en petitesse ; et on déterminera ces limites comme il suit.

Du point donné soit abaissée une perpendiculaire sur la droite qui divise en deux parties égales l'angle de suite de l'angle S ; les points dans lesquels cette perpendiculaire rencontrera la circonférence du cercle, seront les points auxquels répondront la plus grande et la plus petite valeurs des sommes de perpendiculaires abaissées sur les droites données de position.

ANALISE.

Remarques relatives à la formule logarithmique qui se trouve à la page 70 de ce volume;

Par M. SERVOIS, professeur de mathématiques aux écoles d'artillerie de Lafère.



A MM. LES RÉDACTEURS DES *ANNALES*;

MESSIEURS,

En cherchant à me démontrer, d'une manière purement élémentaire, la formule donnée par M. Dubourguet à la page 70 du 2.e volume des *Annales*, il m'a paru que cette formule était entachée d'une petite inexactitude que j'ai cru nécessaire de faire remarquer, et dont j'indiquerai la source, après avoir exposé brièvement le moyen fort simple que j'ai employé pour parvenir à la formule exacte.

Soit la série

$$y+\tfrac{1}{3}y^3+\tfrac{1}{5}y^5+\ldots\ldots+\frac{1}{2n-1}y^{2n-1}+\frac{1}{2n+1}y^{2n+1}+\ldots\ldots$$

Si on la multiplie par $1-y^2$, le terme général du produit sera

$$-\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}y^{2n+1},$$

en sorte qu'on a

$$\left\{y+\tfrac{1}{3}y^3+\tfrac{1}{5}y^5+\ldots\ldots\right\}\left\{1-y^2\right\}=y-\frac{2}{1.3}y^3-\frac{2}{3.5}y^5-\frac{2}{5.7}y^7-\ldots\ldots;$$

mais, dans le système de logarithmes de Neper, on a aussi

$$l\left(\frac{1+y}{1-y}\right)=2\left\{y+\tfrac{1}{3}y^3+\tfrac{1}{5}y^5+\tfrac{1}{7}y^7+\ldots\right\}.$$

Formant le produit de ces deux équations, l'équation résultante deviendra, par la suppression de la série commune à ses deux membres, et la division par $1-y^2$

$$l\left(\frac{1+y}{1-y}\right)=\frac{2}{1-y^2}\left\{y-\frac{2}{1.3}y^3-\frac{2}{3.5}y^5-\frac{2}{5.7}y^7-\ldots\right\}.$$

Posant alors

$$\frac{1+y}{1-y}=x,\quad \text{d'où}\quad y=\frac{x-1}{x+1},\qquad \frac{2}{1-y^2}=\frac{(x+1)^2}{2x};$$

il viendra

$$lx=\frac{(x+1)^2}{2x}\left\{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-\frac{2}{1.3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3-\frac{2}{3.5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5-\ldots\right\}.$$

Formule qui revient à

$$lx=\frac{x-1}{x}\left\{\frac{x+1}{2}-\left[\frac{1}{1.3}\frac{(x-1)^2}{(x+1)}+\frac{1}{3.5}\frac{(x-1)^4}{(x+1)^3}+\frac{1}{5.7}\frac{(x-1)^6}{(x+1)^5}+\ldots\right]\right\}.$$

La formule donnée par M. Dubourguet est

$$lx=\frac{x-1}{x}\left\{\frac{x+1}{2}-\left[\frac{1}{1.3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+\frac{1}{3.5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4+\frac{1}{5.7}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\ldots\right]\right\}$$

et son calcul est exact jusqu'au bout; de manière que l'erreur ne peut venir uniquement que de ce que, dans la substitution de la valeur de $\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^2}}$, il aura sans doute écrit $\frac{(x-1)^3}{2x(x+1)^2}$, au lieu de $\frac{(x-1)^3}{2x(x+1)}$.

Il est fâcheux, au surplus, que cette formule doive avoir la forme que je viens d'indiquer, attendu qu'elle perd ainsi un peu de sa convergence.

Agréez, Messieurs, etc.

Lafère, 2 octobre 1811.

GÉOMÉTRIE.

De l'inscription du quarré au triangle, et de celle du cube au tétraèdre;

Par M. FERRIOT, principal du collége de Baume.

I. UN quarré ayant quatre angles et un triangle ayant seulement trois côtés; la première de ses figures ne saurait être inscrite à la seconde à moins que deux de ses sommets ne soient situés sur un même côté du triangle et que conséquemment un côté de la première figure se trouve appliqué sur un côté de la seconde.

Mais, d'autant que le côté du triangle avec lequel doit se confondre un côté du quarré à inscrire peut être choisi de trois manières différentes, on voit que le problème a, en général, trois solutions.

Entre les diverses méthodes que l'on peut indiquer pour inscrire un quarré à un triangle, la suivante paraît devoir mériter la préférence, tant à cause de sa simplicité que parce qu'elle peut être facilement étendue à l'inscription du cube au tétraèdre.

Soit ASB (fig. 5) le triangle proposé; soit AB le côté de ce triangle sur lequel on veut que repose un côté du quarré à inscrire et soit A′B′D′E′ ce quarré. Sur AB, comme côté, soit construit un autre quarré ABDE; les triangles ASB et A′SB′ étant semblables, les pentagones ASBDE et A′SB′D′E′ doivent l'être aussi, d'où il est aisé de conclure que le point E′ doit être sur la droite SE.

La construction se réduit donc à ce qui suit: A l'une quelconque A des extrémités de AB soit élevée à cette droite du côté opposé au triangle, une perpendiculaire AE égale à elle; en menant SE, son intersection E′ avec AB sera l'un des sommets du quarré cherché, et alors le problème pourra être considéré comme résolu.

II.

II. Un cube ayant huit sommets, et un tétraèdre ayant quatre faces seulement, mais qui, trois à trois, concourent en un même point; il est impossible que les huit sommets d'un cube inscrit à un tétraèdre soient distribués deux à deux sur les quatre faces du tétraèdre. D'un autre côté, il est aisé de voir que trois des sommets d'un cube ne sauraient être sur une des faces d'un tétraèdre, dans lequel il est inscrit, sans qu'un quatrième sommet soit aussi sur la même face du tétraèdre, et qu'alors cette face n'en peut recevoir un plus grand nombre; et, comme alors les quatre sommets restants doivent être distribués sur trois faces seulement, l'une d'elles devra en contenir deux, et contiendra conséquemment une des arêtes du cube.

Lors donc qu'un cube est inscrit à un tétraèdre, l'une des faces du cube doit se confondre avec le plan de l'une des faces du tétraèdre, et la face opposée de ce cube doit être un quarré inscrit à la section faite au tétraèdre par le plan de cette face.

Or, la face du tétraèdre qui doit recevoir une des faces du cube peut être choisie de quatre manières différentes, et, dans chaque cas, celle des trois autres faces du tétraèdre qui doit contenir une des arêtes du cube, peut être choisie de trois manières; ainsi, on peut, en général, inscrire à un tétraèdre douze cubes différens.

Cela posé, qu'il soit question d'inscrire un cube au tétraèdre SABC (fig. 6), de telle manière que la face ABC du tétraèdre contienne une des faces du cube, et que la face ASC du tétraèdre contienne une des arêtes de ce cube.

Soit $D'E'F'G'H'I'K'L'$ le cube demandé, dont la face $H'I'K'L'$ soit sur la face ABC du tétraèdre, l'arête $D'G'$ sur la face ASC de ce tétraèdre, et enfin les sommets E', F', sur les faces SBA, SBC, respectivement. Soit joint le point S aux points D', E', F', G', par des droites se terminant en D, E, F, G, au plan de la face ABC; il est aisé de voir que ces points seront les sommets d'un quarré DEFG inscrit à cette face. Sur ce quarré, et du côté opposé au tétraèdre soit construit le cube DEFGHIKL; à cause de la similitude des pyramides quadrangulaires SDEFG et $SD'E'F'G'$, ces pyrami-

des augmentées des deux cubes formeront deux polyèdres semblables; d'où il est aisé de conclure que, si l'on mène SI, cette droite contiendra le point I′.

La construction se réduit donc à ce qui suit: soit déterminé (I) le point D de AC sur lequel doit être situé l'un des sommets du quarré inscrit au triangle ABC; soit menée DE, perpendiculaire à AC et se terminant en E à AB; soit ensuite élevée au plan de ABC, par le même point D, une perpendiculaire DI égale à DE; enfin soit menée SI coupant en I′ la base ABC; ce point I′ sera l'un des sommets du cube cherché; et, ce sommet étant ainsi déterminé, le problème pourra être regardé comme résolu.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème énoncé à la page 96 de ce volume;

Par M. Tédenat, correspondant de la première classe de l'Institut, recteur de l'académie de Nismes.

A MM. les Rédacteurs des *Annales*,

Messieurs,

Je viens de recevoir le 3.e numéro du 2.me volume de vos *Annales*. Pour me distraire un moment de mes occupations ordinaires, je l'ai parcouru, et je me suis arrêté sur le théorème d'analise que l'on trouve énoncé à la page 96. La démonstration n'en sera pas difficile

pour ceux à qui le calcul des différences est familier. Je me contenterai d'en indiquer la marche, sans entrer dans aucun détail.

On sait que y, y_1, y_2, y_3, ... y_n, désignant les états successifs d'une fonction y d'une variable x, on a généralement

$$\Delta^n y = y_n - \frac{n}{1} y_{n-1} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} y_{n-2} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} y_{n-3} + \dots \text{(A)}$$

Soit

$$y = x^m ,$$

et supposons que x prenne successivement des accroissemens égaux désignés par Δx; on aura

$$y_1 = \{x + \Delta x\}^m ,$$
$$y_2 = \{x + 2\Delta x\}^m ,$$
$$\dots\dots\dots\dots ,$$
$$y_{n-2} = \{x + (n-2)\Delta x\}^m ,$$
$$y_{n-1} = \{x + (n-1)\Delta x\}^m ,$$
$$y_n = \{x + n\Delta x\}^m .$$

Substituant donc dans l'équation (A), il viendra

$$\Delta^n y = \{x + n\Delta x\}^m - \frac{n}{1}\{x + (n-1)\Delta x\}^m + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}\{x + (n-2)\Delta x\}^m - \dots ;$$

équation qui, en y supposant $n = m$, se change en celle-ci

$$\Delta^m y = \{x + m\Delta x\}^m - \frac{m}{1}\{x + (m-1)\Delta x\}^m + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2}\{x + (m-2)\Delta x\}^m - \dots\dots \text{(B)}.$$

Mais, d'un autre côté, d'après la valeur $y = x^m$, et l'égalité des accroissemens de la variable indépendante x, il est connu qu'on doit avoir

$$\Delta^m y = 1.2.3.4 \dots\dots m\Delta x^m \quad (*) ; \qquad \text{(C)}$$

(*) Cette proposition n'est qu'un cas particulier de la suivante :

on aura donc, à cause de l'équation (B);

$$1.2.3\ldots\ldots m\Delta x^m=\{x+m\Delta x\}^m-\frac{m}{1}\{x+(m-1)\Delta x\}^m+\frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}\{x+(m-2)\Delta x\}^m-\ldots; \quad \text{(D)}$$

équation qui, en y faisant $x=(z-m)\Delta x$, et divisant ensuite ses deux membres par Δx^m devient

---

« Si dans une fonction rationnelle et entière, telle que

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots\ldots+Gx+H, \qquad \text{(M)}$$

» on substitue pour x les termes consécutifs d'une progression par différences dont » la raison soit δ; les résultats des substitutions formeront une suite dont les m.^{emes} » différences seront constantes et égales à

$$1.2.3\ldots\ldots\ldots mA\delta^m.$$

Cette dernière trouvant une utile application dans la recherche des limites des racines incommensurables des équations numériques, nous croyons convenable d'en présenter ici une démonstration générale purement élémentaire.

Supposons qu'elle soit déjà démontrée pour toutes les fonctions des degrés inférieurs à m, et soit k l'un quelconque des termes de la progression des nombres à substituer dans la fonction (M); le suivant sera $k+\delta$; exécutant donc la substitution de ces deux termes, et prenant la différence des résultats; il viendra

$$mA\delta k^{m-1}+\frac{m-1}{2}\,\delta\left\{2B+mA\delta\right\}k^{m-2}+\ldots\ldots; \quad \text{(N)}$$

tel est donc le terme général des premières différences de la suite dont il s'agit, et on en conclura ces premières différences, en y substituant successivement pour k la suite $k+\delta$, $k+2\delta$, $k+3\delta$, ... ; mais cette suite étant une progression par différences, dont la raison est δ, et la fonction (N), dans laquelle il faut la substituer, étant une fonction entière et rationnelle du degré $m-1$, dont le premier terme a pour coefficient $mA\delta$; il résulte de l'hypothèse que les résultats des substitutions, c'est-à-dire, les premières différences de la fonction (M) formeront une suite dont les $(m-1)$^{emes} différences, lesquelles seront par conséquent les m.^{emes} différences de la fonction (M) seront constantes et égales à

$$1.2.3\ldots\ldots(m-1)\delta\times\delta mA\times\delta^{m-1}=1.2.3\ldots\ldots mA\delta^m.$$

Il est donc prouvé, par là, que la proposition serait vraie pour une fonction du degré m, si elle était vraie pour une fonction du degré $m-1$. Or, il est très-facile de se convaincre qu'elle est vraie pour les fonctions des deux ou trois premiers degrés, d'où il faut conclure qu'elle est générale.

$$1.2.3\ldots\ldots m=z^m-\frac{m}{1}(z-1)^m+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}(z-2)^m-\ldots;$$

faisant, dans cette dernière, $z=m+1$, on obtiendra celle qu'il s'agissait de démontrer. (*)

Agréez, Messieurs, etc.

Nismes, le 2 septembre 1811.

Sur les différences des ordres successifs des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique;

Pour servir de réponse à la même question;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.



Le théorème algébrique proposé à démontrer à la page 96 du 2.me volume des *Annales*, peut être énoncé comme il suit : *Les différences de l'ordre* m.eme *des puissances* m.emes *des nombres naturels successifs sont une quantité constante ; savoir : le pro-*

On pourrait prouver, plus généralement, que *si, dans une fonction entière et rationnelle du degré* m, *on substitue les termes d'une suite dont les* n.emes *différences soient constantes, les résultats des substitutions formeront une suite dont les* mn.emes *différences seront constantes.*

(*) M. Servois, professeur de mathématiques aux écoles d'artillerie de Lafère, a aussi adressé aux rédacteurs des *Annales* une démonstration de cette formule ; mais elle ne diffère en rien de celle de M. Tédenat.

(*Notes des éditeurs.*)

duit continuel des nombres naturels depuis l'unité jusqu'à l'exposant m.

Cette proposition appartient à la doctrine des différences finies, qui sert d'introduction aux calculs supérieurs. Je l'ai demontrée dans mon ouvrage intitulé : *Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris*. En travaillant de nouveau ce sujet, à l'occasion de la demande faite dans les *Annales*, j'ai établi la loi générale des différences de tous les ordres des puissances semblables des termes successifs d'une progression arithmétique. Le théorème proposé devient ainsi un cas très-particulier de cette doctrine générale.

§. 1.

Pour abréger et pour faciliter le développement de ce sujet, je vais d'abord établir quelques symboles.

Je désignerai par $\int.P_1$, $\int.P_2$, $\int.P_3$, $\int.P_4$,.... $\int.P_{n-1}$, $\int.P_n$, les sommes des produits de 1, 2, 3, 4,.... $n-1$, n, dimensions, faits avec des lettres proposées et leurs puissances.

Les lettres proposées étant A_1, A_2, A_3, A_4, la somme des produits de n dimensions, faits avec ces lettres déterminées, sera exprimée comme il suit : $\int.P_n.\ A_1....A_4$.

Que les lettres qui composent ces produits soient au nombre de deux seulement, on conservera cette symbolisation, en supprimant les points mis entre ces lettres. Ainsi l'expression $\int.P_n.A_1A_4$ est celle de la somme des produits de n dimensions, faits avec les deux lettres A_1 et A_4 (*).

§. 2.

Sur les différences premières.

Soient A et A′ deux termes successifs d'une progression arithmétique, des termes de laquelle on prend les $m.^{emes}$ puissances; et les différences premières de ces $m.^{emes}$ puissances; on aura

(*) Ces sortes de fonctions ont déjà été considérées d'une maniere spéciale par M. de Wronski; (Voy. son *Introduction à la philosophie des mathématiques*,

$$A_2^m - A_1^m = (A_2 - A_1)(A_2^{m-1} + A_2^{m-2}A_1 + A_2^{m-3}A_1^2 + \ldots + A_2^2 A_1^{m-3} + A_2 A_1^{m-2} + A_1^{m-1})$$

$$= (A_2 - A_1) \int P_{m-1} . A_2 A_1 :$$

Savoir : un terme des différences premières des puissances m.emes des termes d'une progression arithmétique, est le produit de la différence constante des termes de cette progression par la somme des produits de $m-1$ dimensions, faits avec les termes dont on prend les différences premiè res des puissances.

§. 3.

Sur les différences secondes.

Soient A_1, A_2, A_3, trois termes successifs d'une progression arithmétique, des termes de laquelle on prend les m.emes puissances, et les différences secondes de ces puissances, on a, par ce qui précède,

$$A_2^m - A_1^m = (A_2 - A_1) \int P_{m-1} . A_2 A_1 ,$$

---

pag. 65) il les désigne par la caractéristique hébraïque (*Aleph*) ; ainsi, par exemple, la fonction

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc ,$$

que M. Lhuilier désigne par

$$\int P_2 . abc ,$$

est désignée par M. de Wronski ainsi qu'il suit :

$$\aleph [a + b + c]^2 ;$$

de manière qu'en général

$$\int . P_m . abc \ldots k = \aleph [a + b + c + \ldots + k]^m .$$

(*Note des éditeurs.*)

$$A_3^m - A_2^m = (A_2 - A_1) \int.P_{m-1} \cdot A_3 A_2 ;$$

d'où

$$A_3^m - 2A_2^m + A_1^m = (A_2 - A_1) \left\{ \int.P_{m-1} \cdot A_3 A_2 - \int.P_{m-1} \cdot A_2 A_1 \right\}$$

$$= (A_2 - A_1) \left\{ \begin{array}{l} (A_3^{m-1} + A_3^{m-2} A_2 + \ldots\ldots + A_3 A_2^{m-2} + A_2^{m-1}) \\ -(A_2^{m-1} + A_2^{m-2} A_1 + \ldots\ldots + A_2 A_1^{m-2} + A_1^{m-1}) \end{array} \right\}$$

$$= 1.2(A_2 - A_1)^2 \left\{ \int.P_{m-2} \cdot A_3 A_1 + A_2 \int.P_{m-3} \cdot A_3 A_1 + A_2^2 \int.P_{m-4} \cdot A_3 A_1 + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + A_2^{m-3} \int.P_1 \cdot A_3 A_1 + A_2^{m-2} \right\} ;$$

ou enfin

$$A_3^m - 2A_2^m + A_1^m = 1.2.(A_2 - A_1)^2 \int.P_{m-2} \cdot A_3 \ldots A_1 .$$

Savoir : un terme de différences secondes des puissances m.emes des termes d'une progression arithmétique est le double du produit du quarré de la différence constante des termes de la progression par la somme des produits de $m-2$ dimensions, faits avec les termes dont on prend les différences secondes des puissances.

§. 4.

Sur les différences troisièmes.

Soient A_1, A_2, A_3, A_4 quatre termes successifs d'une progression arithmétique, des termes de laquelle on prend les m.emes puissances et les différences troisièmes de ces puissances. On a, par ce qui précède,

A_3^m

$$A_3^m - 2A_2^m + A_1^m = 1.2.(A_2 - A_1)^2 \int.P_{m-2}.\ A_3 \ldots A_1\ ;$$

$$A_4^m - 2A_3^m + A_2^m = 1.2.(A_2 - A_1)^2 \int.P_{m-2}.\ A_4 \ldots A_2\ ;$$

d'où

$$A_4^m - 3A_3^m + 3A_2^m - A_1^m = 1.2.(A_2 - A_1)^2 \left\{ \int.P_{m-2}.\ A_4 \ldots A_2 - \int.P_{m-2}.\ A_3 \ldots A_1 \right\}$$

$$= 1.2(A_2 - A_1)^2 \left\{ \begin{array}{l} (A_4^{m-2} - A_1^{m-2}) \\ +(A_4^{m-3} - A_1^{m-3}) \int.P_1\ A_3\ A_2 \\ +(A_4^{m-4} - A_1^{m-4}) \int.P_2\ A_3\ A_2 \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(A_4^3 - A_1^3) \int.P_{m-5}.\ A_3\ A_2 \\ +(A_4^2 - A_1^2) \int.P_{m-4}.\ A_3\ A_2 \\ +(A_4 - A_1) \int.P_{m-3}.\ A_3\ A_2\ ; \end{array} \right.$$

ou enfin

$$A_4^m - 3A_3^m + 3A_2^m - A_1^m = 1.2.3.(A_2 - A_1)^3 \int.P_{m-3}.\ A_4 \ldots A_1\ ;$$

savoir : un terme des différences troisièmes des puissances m.^{emes} des termes d'une progression arithmétique est le produit continuel des trois premiers nombres naturels, du cube de la différence constante des termes de la progression et de la somme des produits de $m-3$ dimensions, faits avec les termes dont on prend les différences troisièmes des puissances.

§. 5.

En procédant continuellement de cette manière, on parvient à déterminer les différences quatrièmes d'après la connaissance des différences troisièmes, puis les différences cinquièmes, et ainsi de suite.

En général; soient A_1, A_2, A_3, ... A_n, A_{n+1}; $n+1$ termes successifs d'une progression arithmetique, des termes de laquelle on prend les m.^{emes} puissances, et les $(n+1)^{emes}$ différences de ces puissances. Qu'on se soit assuré qu'on a l'équation

$$A_n^m - \frac{n}{1}A_{n-1}^m + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}A_{n-2}^m - \dots \pm \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}A_3^m \mp \frac{n}{1}A_2^m \pm A_1^m$$

$$= 1.2.3\dots(n-1)(A_2 - A_1)^{n-1} \int.P_{m-n+1} . A_n \dots A_1 ,$$

j'affirme qu'on a aussi l'équation

$$A_{n+1}^m - \frac{n+1}{1}A_n^m + \frac{n+1}{1}\frac{n}{2}A_{n-1}^m - \dots \mp \frac{n+1}{1}\frac{n}{2}A_3^m \pm \frac{n+1}{1}A_2^m \mp A_1^m$$

$$= 1.2.3\dots n(A_2 - A_1)^n \int.P_{m-n} . A_{n+1} \dots A_1 .$$

En effet, des deux équations supposées vraies pour les termes $A_{n+1} \dots A_1$ et $A_n \dots A_1$, on tire

$$A_{n+1}^m - \frac{n+1}{1}A_n^m + \frac{n+1}{1}\frac{n}{2}A_{n-1}^m - \dots \mp \frac{n+1}{1}\frac{n}{2}A_3^m \pm \frac{n+1}{1}A_2^m \mp A_1^m$$

$$= 1.2.3\dots(n-1)(A_2 - A_1)^{n-1} \left\{ \int.P_{m-n+1} . A_{n+1} A_1 - \int.P_{m-n+1} . A_n \right\}$$

$$= 1.2.3\dots n(A_2 - A_1)^n \int.P_{m-1} . A_{n+1} \dots A_1 .$$

On a donc le théorème général suivant :

Soit une progression arithmétique des termes de laquelle on prend

les $m.^{emes}$ puissances et les différences $n.^{emes}$ de ces puissances. Un terme quelconque de ces différences est le produit continuel des nombres naturels, depuis l'unité jusqu'à n; de la $n.^{eme}$ puissance de la différence constante des termes de la progression, et de la somme des produits de $m-n$ dimensions, faits avec les termes des puissances, desquels on prend les différences $n.^{emes}$.

En particulier, soit $m=n$; la somme des produits qui forme le troisième facteur est l'unité; et partant, les différences de l'ordre $m.^{eme}$ des puissances $m.^{emes}$ des termes d'une progression arithmétique sont une quantité constante : savoir, le produit continuel des nombres naturels depuis l'unité jusqu'à m, et de la puissance $m.^{eme}$ de la différence constante des termes de la progression.

Solutions du problème de statique proposé à la page 96 de ce volume;

Par M. D. Encontre, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Montpellier;

Et M. Rochat, professeur de mathématiques et de navigation à St-Brieux (*).

Nous allons comprendre ces deux solutions dans une rédaction unique, en faisant remarquer toutefois les différences, très-légères d'ailleurs, qui les distinguent.

PROBLÈME. Une table horizontale, non pesante, de forme

(*) M. Tédenat a aussi remis aux rédacteurs des *Annales* quelques notes relatives à ce problème; elles rentrent, quant au fond, dans les solutions dont on va rendre compte.

quelconque, posant, par des points déterminés, sur trois piliers verticaux, susceptibles, au plus, de résistances respectivement représentées par F, F′, F″, *et qu'on suppose données; on demande:*

1.° *Quel est le plus grand poids que puisse supporter un point déterminé quelconque de la table?*

2.° *Quels sont les points de cette table qui peuvent supporter un poids donné quelconque P?*

3.° *Quel est le plus grand poids que la table puisse supporter?*

4.° *Enfin quel est le point de cette table qui peut supporter ce plus grand poids?*

Solution. Soient f, f', f'', (fig. 7) les points respectifs de la table où répondent les piliers dont les forces sont F, F', F''; soit P un poids placé en p, et cherchons comment la pression qu'il exerce en ce point se répartira entre les trois points d'appui f, f', f''.

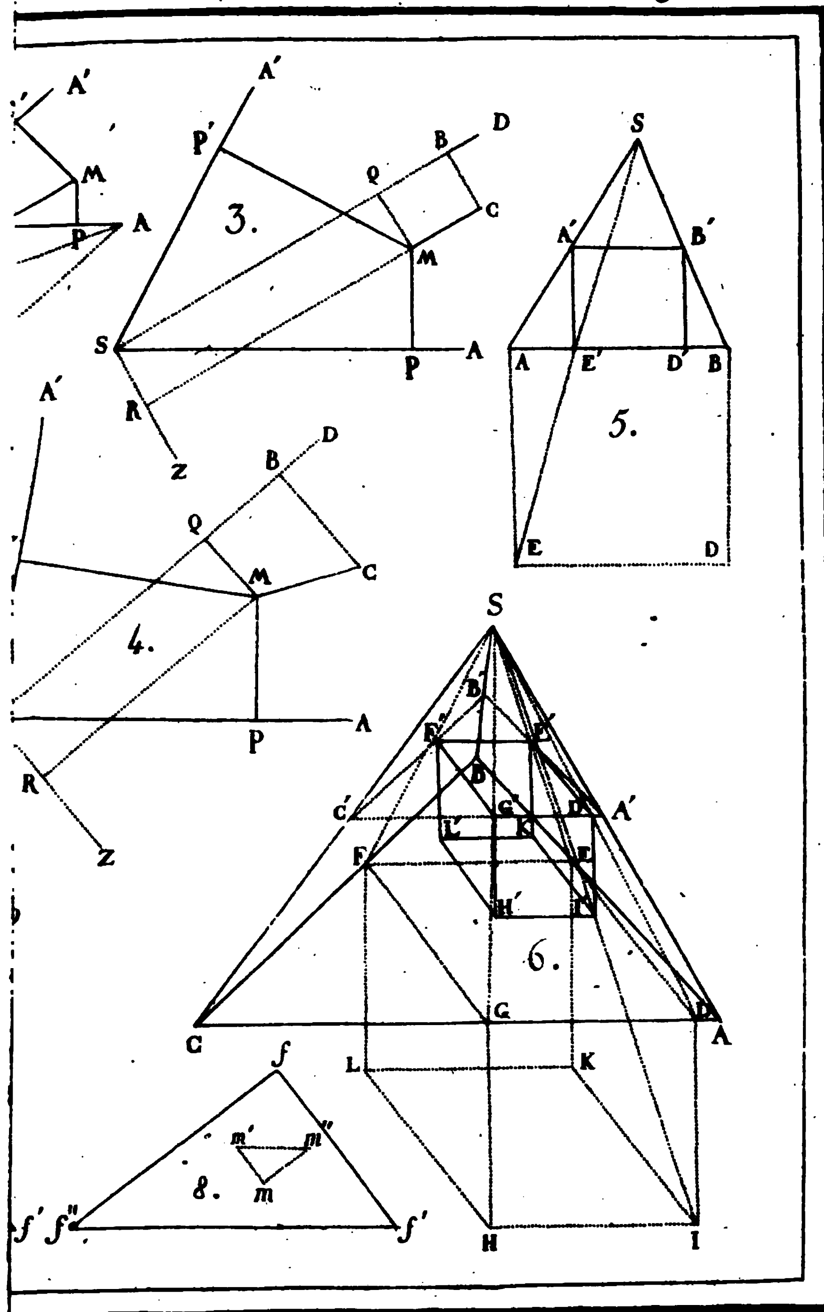
Pour cela, formons le triangle $ff'f''$, et, par p et ses sommets, menons des droites se terminant aux côtés opposés en q, q', q''. Soit décomposé le poids P en deux autres situés en f et q, il ne s'agira plus ensuite que de décomposer ce dernier en deux autres situés en f', f''. Mais comme, au lieu de décomposer, en premier lieu, suivant fq, on pourrait d'abord décomposer suivant $f'q'$ ou $f''q''$, il s'ensuit qu'on peut obtenir trois expressions différentes de chacune des pressions exercées en f, f', f''. En les égalant entre elles, on obtiendra, entre les parties de la figure, diverses équations qui, par leur combinaison, donneront naissance à plusieurs théorèmes de géométrie parmi lesquels M. Rochat remarque le suivant.

$$pq.f'q'.f''q''+pq'.f''q''.fq+pq''.fq.f'q'=fq.f'q'.f''q'';$$

on peut y ajouter encore celui-ci

$$\frac{pq}{fq}+\frac{pq'}{f'q'}+\frac{pq''}{f''q''}=1.$$

En désignant par Φ, Φ', Φ'', les pressions exercées en f, f', f'',



J. D. G. fecit.

respectivement, leurs expressions les plus simples seront les suivantes :

$$\Phi=P.\frac{pq}{fq}\,,\qquad \Phi'=P.\frac{pq'}{f'q'}\,,\qquad \Phi''=P.\frac{pq''}{f''q''}\,;$$

ce sont aussi celles qu'adopte M. Rochat ; mais M. Encontre remarque qu'à cause des triangles de même base, en désignant par T l'aire du triangle $ff'f''$, et par t, t', t'' les aires respectives des triangles $f'pf''$, $f''pf$, fpf', on a

$$\frac{pq}{fq}=\frac{t}{T}\,,\qquad \frac{pq'}{f'q'}=\frac{t'}{T}\,,\qquad \frac{pq''}{f''q''}=\frac{t''}{T}\,;$$

d'où résulte

$$\Phi=P.\frac{t}{T}\,;\qquad \Phi'=P.\frac{t'}{T}\,,\qquad \Phi''=P.\frac{t''}{T}\,;$$

et conséquemment

$$\Phi:\Phi':\Phi''::t:t':t''.$$

I. Ces préliminaires établis, si le point p est donné, et qu'on demande la plus grande valeur qu'il soit possible de donner à P, cette valeur sera limitée par les trois inégalités

$$\Phi<F,\qquad \Phi'<F',\qquad \Phi''<F'',$$

ou

$$P\frac{t}{T}<F\,,\qquad P\frac{t'}{T}<F'\,,\qquad P\frac{t''}{T}<F''\,,$$

ou encore

$$P<F.\frac{T}{t}\,,\qquad P<F'.\frac{T}{t'}\,,\qquad P<F''.\frac{T}{t''}\,,$$

le signe $<$ n'excluant pas l'égalité, et deux de ces inégalités étant nécessairement comportées par la troisième. Ainsi il faudra prendre P égal à la plus petite des trois quantités

$$F.\frac{T}{t}\,,\qquad F'\frac{T}{t'}\,,\qquad F''\frac{T}{t''}\,.$$

II. On peut supposer, en second lieu, que c'est le poids P qui est donné, et qu'il s'agit de déterminer quels sont tous les points p de la table qui peuvent le supporter. Dans ce cas, les mêmes inégalités doivent encore avoir lieu, à la fois.

Si l'on désigne par d, d', d'', les distances respectives du point p aux droites $f'f''$, $f''f$, ff', et par D, D', D'', les distances des points f, f', f'', aux mêmes droites; à cause des triangles de mêmes bases, on aura

$$\frac{t}{T}=\frac{d}{D}\,,\qquad \frac{t'}{T}=\frac{d'}{D'}\,,\qquad \frac{t''}{T}=\frac{d''}{D''}\,;$$

substituant ces valeurs dans les inégalités ci-dessus, on en tirera

$$d<D.\frac{F}{P}\,,\qquad d'<D'.\frac{F'}{P}\,,\qquad d''<D''.\frac{F''}{P}\,.$$

A des distances de $f'f''$, $f''f$, ff' (fig. 8), respectivement égales à $D.\frac{F}{P}$, $D'.\frac{F'}{P}$, $D''.\frac{F''}{P}$, et du côté de l'intérieur du triangle, soient menées des parallèles $m'm''$, $m''m$, mm' à ces côtés. Le point p sera assujéti, par la première condition à être entre $f'f''$ et $m'm''$, par la seconde à être entre $f''f$ et $m''m$, et enfin par la troisième à être entre ff' et mm'. Ainsi on ne pourra prendre pour le point p que l'un de ceux du triangle $mm'm''$ (*).

(*) Nous saisirons cette occasion de remarquer qu'en général, de même que l'équation $y=ax+b$ exprime tous les points d'une droite indéfinie, tracée sur un plan, les inégalités $y>ax+b$, $y<ax+b$ expriment, l'une tous les points du plan de cette droite qui sont situés au-dessus d'elle, et l'autre tous les points de ce plan qui sont situés au-dessous. De même des deux inégalités $x^2+y^2<r^2$, $x^2+y^2>r^2$, la première

Si le triangle $mm'm''$, au lieu d'être tourné en sens inverse du triangle $ff'f''$, était tourné dans le même sens que lui, le problème serait impossible, puisque alors le point p serait assujéti à se trouver à la fois dans les trois espaces déterminés par chaque côté du triangle $mm'm''$ et par les prolongemens des deux autres au-delà de celui-ci.

III. Quant au plus grand poids que la table puisse supporter, il est clair qu'il ne saurait surpasser la somme des résistances F, F', F'', puisque, dans l'hypothèse contraire, l'une au moins de ses composantes surpasserait la résistance qui lui correspondrait.

IV. Ce plus grand poids doit donc être égal à $F+F'+F''$, et il est aisé de déduire de ce qui précède, qu'il ne peut être appliqué qu'en un point unique qui n'est autre que le centre commun de gravité des trois forces F, F', F''. Alors aussi le triangle $mm'm''$ se réduit à un point.

M. Encontre termine par observer que, quand même la table serait supposée pesante, le problème n'en serait pas pour cela plus difficile, pourvu que l'on connût son poids et son centre de gravité; il est clair, en effet, qu'en décomposant ce poids en trois autres appliqués en f, f', f'', et prenant seulement pour F, F', F'', non les résistances des piliers, mais les excès de ces résistances sur les portions du poids de la table qui leur correspondent, le problème se trouverait réduit au cas où la table est sans pesanteur.

---

exprime tous les points d'un plan qui sont intérieurs à un cercle, et la seconde tous ceux qui lui sont extérieurs.

D'après ces considérations, qu'il est facile d'appliquer à l'étendue à trois dimensions, il est aisé de voir qu'il n'est aucune portion d'étendue limitée, en tout ou en partie qu'on ne puisse parvenir à exprimer analitiquement, par un système d'équations et d'inégalités considérées comme ayant lieu à la fois; ainsi, par exemple, un arc de cercle ayant son centre à l'origine sera exprimé par le système

$$y>ax+b\,,\quad y<a'x+b'\,,\quad x^2+y^2=r^2$$

(*Note des éditeurs.*)

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. A un polygone donné, inscrire un autre polygone de même nom dont les côtés soient respectivement parallèles à un même nombre de droites données de position ?

II. Trouver le plan sur lequel projetant orthogonalement un triangle donné, sa projection soit un triangle semblable à un autre triangle donné ? (*)

Théorème de Géométrie.

Dans tout quadrilatère, plan ou gauche, la somme des quarrés des deux diagonales est double de la somme des quarrés de deux droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

(*) Ce problème se trouve résolu, pour le cas particulier où la projection doit être un triangle équilatéral, dans la *Correspondance sur l'école polytechnique* ; tom. II, n.° 1.er, page 20.

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

Recherche directe du terme général du développement d'une puissance quelconque d'un polynome;

Par M. GERGONNE.

NEWTON a donné, pour le développement d'une puissance quelconque d'un binome, une formule qui, à raison de son importance et de la multitude d'applications dont elle est susceptible, doit être considérée comme un des points fondamentaux de l'analise algébrique. Ce grand géomètre ne parvint à cette formule, résultat de ses premières recherches, que par une simple induction; et Clairaut est le premier, je crois, qui ait tenté d'en donner une démonstration proprement dite. On a ajouté depuis à cette démonstration quelques perfectionnemens tendant à la rendre plus rigoureuse; mais elle est demeurée la même quant au fond; et tous ceux qui, dans ces derniers temps, ont écrit des élémens d'algèbre ont pensé ne pouvoir rien faire de plus convenable que de l'adopter. On a aussi étendu la formule de Newton au développement des puissances des polynomes d'un nombre de termes quelconques; et on a prouvé enfin que, bien que les raisonnemens qui y conduisent, supposent essentiellement que l'exposant de la puissance est un nombre entier positif, elle peut néanmoins être appliquée, en toute confiance, au développement des puissances fractionnaires et négatives (*), et même à celles dont l'exposant est incommensurable ou imaginaire (**).

(*) Voy. le *Complément d'algèbre* de M. Lacroix.

(**) Voy. les notes à la fin du 1.er vol. de l'*Introduction au calcul différen-*

Pour suivre donc, dans cette recherche d'analise, la méthode généralement admise aujourd'hui, on est d'abord obligé de déterminer quelques formules appartenant à la théorie des *permutations* et des *combinaisons*. On forme ensuite divers produits de facteurs binomes ayant tous le même premier terme : un examen attentif de ces produits conduit bientôt à faire soupçonner une loi générale à laquelle ils paraissent devoir être assujettis, quel que soit le nombre de leurs facteurs; et l'on parvient en effet à justifier, par un raisonnement rigoureux, cet aperçu fourni par la simple induction. Supposant enfin que les seconds termes des facteurs multipliés deviennent égaux, et faisant subir au résultat d'abord obtenu les modifications qu'entraîne cette circonstance, on arrive ainsi à la formule de Newton, de laquelle on peut déduire ensuite l'expression du terme général du développement d'une puissance quelconque d'un polynome; alors, seulement, on se trouve en état d'écrire ce développement tout réduit.

Cette marche d'ailleurs très-rigoureuse, est, comme on le voit, assez longue et peu naturelle; car, outre qu'il semble plus direct et plus élégant de considérer les binomes comme des cas particuliers des polynomes, que de déduire des premiers ce qui est relatif aux derniers, la supposition de l'inégalité des seconds termes des binomes que l'on multiplie, supposition tout-à-fait étrangère à la question, ne peut tendre qu'à en compliquer la solution; puisqu'en général le résultat d'un calcul est d'autant plus compliqué qu'il y entre un plus grand nombre d'élémens inégaux. Aussi arrive-t-il que, dans la plupart des traités d'algèbre, la formation des puissances et l'extraction des racines des polynomes, au lieu de suivre immédiatement leur multiplication et leur division, comme la filiation des idées semblerait l'exiger, sont présentées beaucoup plus loin, parce qu'on les fait dépendre de la formule du *Binome de Newton* dont, à raison des

---

tiel d'Euler, traduction de M. Labey. Voy. aussi le *Calcul des fonctions* de M. Lagrange, leçon 11.ᵉ

longueurs et des difficultés qu'entraine sa recherche, on croit devoir faire un objet à part, une espèce de *hors-d'œuvre.* Souvent même on ne dit absolument rien, dans ces sortes d'ouvrages, du développement des puissances des polynomes de plus de deux termes.

Toutefois, s'il n'y avait, pour parvenir au but, d'autre route que celle qui a été tracée par Clairaut, quelque longue et quelque détournée qu'elle fût, il faudrait bien nécessairement s'y assujettir. Mais si, par une voie plus courte, plus facile et non moins rigoureuse, on peut parvenir directement au terme général du développement d'une puissance quelconque d'un polynome, de quelque nombre de termes qu'on le suppose d'ailleurs formé, il n'y a point de doute qu'alors cette voie ne doive être préférée, et que le développement des puissances d'un binome ne doive être considéré que comme un cas particulier du résultat général qu'on aura obtenu.

La méthode que je vais exposer me paraît réunir ces avantages. Ce n'est qu'après m'être assuré, par une expérience de dix années au moins, qu'elle n'est pas plus au-dessus de l'intelligence des commençans que tant d'autres théories qu'on est dans l'usage de leur enseigner, que je me suis déterminé à la rendre publique.

Pour ne rien emprunter d'ailleurs, je m'occuperai d'abord de la recherche de la seule formule de la théorie des permutations qui me soit nécessaire pour parvenir à mon but. Je le fais d'autant plus volontiers que les recherches de cette nature ne me paraissent pas exposées d'une manière assez nette dans la plupart des ouvrages destinés à l'enseignement.

I. Soient a, b, c,......, des lettres toutes différentes les unes des autres, au nombre de m, et proposons-nous de déterminer de combien de manières elles peuvent être disposées entre elles, ou, ce qui revient au même, cherchons combien elles peuvent fournir de mots différens, de m lettres chacun.

Soient, pour cela, désignés respectivement par

$$M_m, \quad M_{m-1}, \quad M_{m-2}, \ldots . M_3, \quad M_2, \quad M_1,$$

les nombres qui expriment combien on peut faire de mots au moyen des divers arrangemens de différentes lettres au nombre de

$$m, \quad m-1, \quad m-2, \ldots\ldots 3, \quad 2, \quad 1;$$

on aura évidemment $M_1=1$.

Cela posé, il est clair que, dans la totalité des mots de m lettres, chaque lettre devra occuper à son tour la dernière place, et qu'il y aura autant de ces mots terminés par l'une quelconque de ces lettres qu'il y aura de manières de disposer les $m-1$ autres à sa gauche ou, ce qui revient au même, autant que $m-1$ lettres peuvent fournir de mots différens.

Il suit de là qu'on doit avoir, entre M_m et M_{m-1}, la relation suivante

$$M_m=mM_{m-1};$$

et, comme cette relation est indépendante de la grandeur de m, on pourra écrire successivement

$$\begin{aligned} M_m &= mM_{m-1}, \\ M_{m-1} &= (m-1)M_{m-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ M_2 &= 2M_1, \\ M_1 &= 1; \end{aligned}$$

d'où on conclura, sur-le-champ, par la multiplication et la suppression des facteurs communs aux deux membres de l'équation produit

$$M_m=1.2.3\ldots\ldots(m-1).m. \; (*)$$

(*) Cette manière assez simple et assez nette de parvenir au but peut être appliquée avec avantage à une multitude d'autres recherches du même genre.

Que l'on propose, par exemple, de *déterminer le nombre des mots distincts, de* n *lettres chacun, que l'on peut former avec* m *lettres données, toutes différentes les unes des autres?* Pour y parvenir, soient désignés respectivement par

$$M_1, \quad M_2, \quad M_3, \ldots\ldots M_{n-2}, \quad M_{n-1}, \quad M_n,$$

II. Voilà pour le cas où toutes les m lettres sont différentes les unes des autres. Concevons maintenant que plusieurs de ces lettres, au nombre

---

les nombres qui expriment combien avec les m lettres données on peut former de mots dont le nombre des lettres soit

$$1,\quad 2,\quad 3,\ldots\ldots.n-2,\quad n-1,\quad n;$$

on aura évidemment $M_1=m$. Concevons de plus que les mots de $n-1$ lettres soient déjà formés; si l'on écrit successivement, à la droite de chacun, chacune des $m-(n-1)$ ou $m-n+1$ lettres qui ne s'y trouvent pas, on formera évidemment $m-n+1$ fois autant de mots de n lettres chacun qu'on en avait d'abord de $n-1$ lettres. Je dis de plus qu'on formera ainsi tous les mots de n lettres que peuvent fournir les lettres données, et qu'on ne formera chacun d'eux qu'une fois seulement.

Cette dernière assertion se prouve en faisant voir que, si l'on compose au hasard un mot de n lettres, prises parmi les m lettres données, ce mot doit se trouver, et se trouver une seule fois parmi ceux qu'on aura formé. Or, soit

$$gla\ldots\ldots dhp\,,$$

le mot de n lettres dont il s'agit; puisque, par l'hypothèse, on avait, une fois seulement, tous les mots de $n-1$ lettres, on devait avoir et n'avoir qu'une fois le mot

$$gla\ldots\ldots dh\,,$$

ne différant du précédent que par la suppression de la lettre p; puis donc qu'on a écrit, et qu'on n'a écrit qu'une seule fois à la droite de chacun, chacune des lettres qui n'y entrait pas, on a dû écrire, et n'écrire qu'une fois la lettre p à la droite de ce dernier; on a donc formé l'autre, et on ne l'a formé qu'une seule fois.

D'après ce qui précède, on doit avoir, entre M_n et M_{n-1}, la relation suivante :

$$M_n=(m-n+1)M_{n-1}\;;$$

et, comme cette relation est indépendante de la grandeur de n, on pourra écrire successivement

$$\begin{aligned}
M_n &=(m-n+1)M_{n-1}\,,\\
M_{n-1} &=(m-n+2)M_{n-2}\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
M_2 &= (m-1)M_1\,,\\
M_1 &= m\;;
\end{aligned}$$

de a se changent toutes en a ; il est clair qu'alors tous les mots où les autres lettres se trouveront occuper les mêmes rangs respec-

---

d'où on conclura, sur-le-champ, par la multiplication et la suppression des facteurs communs aux deux membres de l'équation produit,

$$M_n = m.(m-1)\ldots\ldots(m-n+2).(m-n+1).$$

En faisant, dans cette formule, $m=n$, et renversant, dans le second membre, il vient

$$M_n = 1.2.3.\ldots\ldots n;$$

formule des permutations, démontrée dans le texte.

A l'aide de ces deux formules, il est facile, comme l'on sait, de résoudre cette question : *Combien, avec* m *nombres donnés, tous différens les uns des autres, peut-on faire de produits distincts, de* n *facteurs chacun ?* Mais M. A. Ollive, ancien élève du lycée de Nismes, est parvenu à résoudre directement cette dernière question par les considérations suivantes qui me paraissent assez simples.

Soient représentés respectivement par

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \ldots\ldots P_{n-2}, \quad P_{n-1}, \quad P_n$$

les nombres qui expriment combien, avec m nombres donnés, tous différens les uns des autres, on peut faire de produits dont le nombre des facteurs soit exprimé par

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots\ldots n-2, \quad n-1, \quad n;$$

on aura évidemment $P_1=m$. Concevons de plus que tous les produits de $n-1$ facteurs soient déjà formés, et qu'on introduise, tour à tour, dans chacun d'eux, chacun des $m-n+1$ facteurs qui n'y entrent pas ; on formera ainsi des produits de n facteurs dont le nombre sera $m-n+1$ fois plus grand que celui des produits de $n-1$ facteurs qu'on avait d'abord ; je dis de plus que, par ce procédé, on aura formé n fois chacun des produits de n facteurs.

Pour prouver cette dernière assertion, il suffit de faire voir qu'un tel produit, composé au hasard, se trouve n fois parmi ceux qu'on aura formé : or, c'est là une chose facile ; car soit ce produit

$$a.b.c.\ldots\ldots g.h.k;$$

si l'on en ôte successivement chacun de ses n facteurs, on formera les n produits de $n-1$ facteurs que voici :

tivement, se réduiront à un mot unique : or, il y aura autant de ces mots, pour un arrangement donné des lettres demeurées inégales, qu'il y a de manières de permuter entre elles les lettres qu'on suppose être devenues égales; mais ce nombre est, d'après ce qui pré-

---

$$b.c.\ldots\ldots\ldots g.h.k\ ,$$
$$a.c.\ldots\ldots\ldots g.h.k\ ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,$$
$$a.b.c.\ldots\ldots\ldots g.k\ ,$$
$$a.b.c.\ldots\ldots\ldots g.h\ ;$$

lesquels devaient se trouver, une fois chacun, parmi ceux dont il a été question ci-dessus; puis donc qu'on a dû introduire la lettre a à son tour dans le prèmier, la lettre b à son tour dans le second, et ainsi de suite, on a dû former n fois le produit $a.b.c.\ldots.g.h.k$, et on en peut dire autant de chacun des autres.

D'après ces considérations, on doit avoir, entre P_n et P_{n-1}, la relation suivante

$$nP=(m-n+1)P_{n-1}\ ;$$

et, comme cette relation est indépendante de la grandeur de n, on peut écrire

$$\begin{aligned} nP_n &= (m-n+1)P_{n-1}\ , \\ (n-1)P_{n-1} &= (m-n+2)P_{n-2}\ , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ , \\ 2P_2 &= (m-1)P_1\ , \\ 1P_1 &= m\ ; \end{aligned}$$

d'où on conclura, sur-le-champ, par la multiplication et la suppression des facteurs communs aux deux membres de l'équation produit,

$$1.2.3\ldots\ldots nP_n=m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1)\ ,$$

et par conséquent

$$P_n=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\ldots\ldots\frac{m-n+1}{n}.$$

cède, $1.2.3.\ldots.\alpha$, et doit conséquemment, dans le cas présent, devenir diviseur de la formule ci-dessus; et, comme le même raisonnement est applicable à tout autre groupe de lettres devenues pareilles, on peut établir généralement que, si l'on a α lettres pareilles à a, β lettres pareilles à b, γ lettres pareilles à c, et ainsi de suite, de manière qu'on ait $\alpha+\beta+\gamma+\ldots.=m$, le nombre des divers arrangemens dont ces m lettres seront susceptibles, aura pour expression

$$(A)\qquad \frac{1.2.3.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(m-1)m}{1.2.\ldots\alpha\times1.2.\ldots\beta\times1.2.\ldots\gamma\times\ldots};$$

c'est là, par exemple, le nombre qui exprime de combien de manières différentes on peut écrire, les uns à côté des autres, les facteurs du monome

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots\ldots;$$

si toutefois on a $\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots=m$.

III. Ces préliminaires établis, qu'il soit question d'assigner la forme du développement de $(a+b+c+\ldots\ldots+r)^m$, ou plutôt celle de son terme général; le moyen le plus naturel de parvenir à ce développement, si l'indétermination tant de m que du nombre des termes de la racine ne le rendait impraticable, serait de multiplier le polynome $a+b+c+\ldots\ldots+r$ par lui-même $m-1$ fois. Concevons néanmoins que l'on procède de cette manière; mais que, pour éviter des réductions qui ne laisseraient, dans les coefficiens des termes réduits, aucune trace de leur origine, on convienne, dans le cours des multiplications de monome à monome qui doivent conduire au dernier résultat, d'écrire constamment la lettre multiplicateur à la droite du terme multiplicande, tout comme on le ferait si les exposans n'étaient pas d'usage, et qu'en outre on ignorât qu'il est permis, dans une multiplication, d'intervertir à volonté l'ordre des facteurs (*). Alors, comme on n'exécutera aucune réduction, il est

(*) Je dois la première idée de ce moyen de démonstration à M. Lavernède qui, depuis long-temps, en fait usage pour parvenir à la formule du Binome.

aisé

aisé de voir qu'en désignant par n le nombre des termes de la racine, le premier produit aura n^2 termes de 2 dimensions, le second en aura n^3 de 3 dimensions, et ainsi de suite, en sorte que la puissance cherchée sera un polynome homogène de m dimensions ayant n^m termes, sans coefficiens ni exposans, et dont les termes seront formés de lettres prises parmi celles du polynome proposé, et écrites une ou plusieurs fois.

Je dis présentement que ce produit contiendra, une fois seulement, chacun des mots de m lettres qu'il est possible de faire, en n'y employant que des lettres prises parmi celles du polynome proposé, et répétant chacune d'elles autant de fois qu'on voudra. Soit en effet formé, au hasard, un pareil mot, et soit ce mot

$$dbba.....gacl\,;$$

d'après la manière dont on suppose que les résultats successifs ont été formés, pour que ce mot ne fît pas partie du dernier produit ou s'y trouvât plusieurs fois, il faudrait que le mot

$$dbba.....gac$$

ne fît pas partie de l'avant-dernier ou s'y trouvât plusieurs fois; par la même raison, le mot

$$dbba.....ga$$

manquerait dans le précédent ou s'y trouverait plusieurs fois, et, en continuant ainsi, de proche en proche, on serait conduit à conclure, contrairement à l'hypothèse, que la lettre d manque dans le polynome proposé, ou s'y trouve plusieurs fois.

Rendons présentement à chacun de ces termes la forme ordinaire; l'un quelconque d'entre eux deviendra

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma.....,$$

avec la condition $\alpha+\beta+\gamma+.....=m$; mais il ne sera plus alors seul de son espèce, d'autant que ceux qui, jusque-là, ne différaient de lui que par la disposition des lettres, lui deviendront absolument

semblables; et, comme le développement renfermait, avant d'avoir subi la modification dont il s'agit ici, tous les mots qui pouvaient être formés de cette manière, et ne renfermait chacun d'eux qu'une fois seulement, il s'ensuit que ce développement, ainsi modifié, renfermera autant de termes pareils à celui que nous venons d'écrire, qu'il y a de manières de disposer, les uns à côté des autres, les facteurs dont ce terme est composé; il faudra donc, pour faire la réduction de ces termes, n'en écrire qu'un seul, et lui donner pour coefficient la formule (A), à laquelle nous sommes parvenus (II). Le terme général du développement de $(a+b+c+\ldots\ldots+r)^m$ est donc

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m}{1.2\ldots\alpha\times1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times\ldots}a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots\ldots;$$

et on en déduira tous les termes de ce développement en y admettant successivement, pour α, β, $\gamma\ldots\ldots$, tous les systèmes de valeurs entières et positives, y compris zéro, qui pourront satisfaire à la condition

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots=m.$$

IV. Si l'on suppose actuellement que le polynome $a+b+c+\ldots+r$ se réduise au binome $x+a$, le terme général du développement de $(x+a)^m$ sera simplement

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots m}{1.2.3\ldots\alpha\times1.2.3\ldots\beta}a^\beta x^\alpha,$$

avec la condition $\alpha+\beta=m$. Soit changé β en n, on aura $\alpha=m-n$; ce terme général pourra alors être écrit comme il suit

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)\ldots3.2.1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots n\,.\,(m-n)\ldots3.2.1}a^n x^{m-n},$$

ou, en réduisant,

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\frac{m-n+1}{n}a^n x^{m-n};$$

c'est là le terme général connu de la formule du binome.

V. On peut, au surplus, parvenir directement à ce dernier résultat, sans rien emprunter de la théorie des permutations et combinaisons. Il suffit, en effet, de former les premières puissances du binome $x+a$ pour être conduit à soupçonner que, dans toute puissance de ce binome, le coefficient d'un terme quelconque pourrait bien être le coefficient du terme précédent multiplié par l'exposant de x dans ce même terme, et divisé par le rang qu'il occupe à partir du premier.

Cette observation une fois faite, il n'est plus question que de changer en certitude le soupçon auquel elle conduit. Pour cela, supposons que la loi dont il s'agit de prouver l'existence, se soutienne jusqu'au développement de $(x+a)^{m-1}$; il est aisé de voir que, dans cette hypothèse, en faisant pour abréger

$$\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdots\frac{m-n+1}{n-1}=P,$$

trois termes généraux consécutifs de ce développement seront

$$Pa^{n-1}x^{m-n}+P.\frac{m-n}{n}a^nx^{m-n-1}+P.\frac{m-n}{n}\cdot\frac{m-n-1}{n+1}a^{n+1}x^{m-n-2}.$$

Pour passer de là au développement de $(x+a)^m$, il suffira d'exécuter la multiplication par $x+a$; or il est aisé de voir que le produit de cette multiplication renfermera les deux termes généraux consécutifs que voici

$$\left.\begin{matrix}P.\dfrac{m-n}{n}\\ +P\end{matrix}\right|a^nx^{m-n}+\left.\begin{matrix}P.\dfrac{m-n}{n}\cdot\dfrac{m-n+1}{n+1}\\ +P.\dfrac{m-n}{n}\end{matrix}\right|a^{n+1}x^{m-n-1},$$

lesquels deviennent, en réduisant

$$P.\frac{m}{n}a^nx^{m-n}+P.\frac{m}{n}\cdot\frac{m-n}{n}a^{n+1}x^{m-n-1},$$

et sont évidemment encore assujettis à la même loi. Cette loi exis-

tera donc pour la m^{me} puissance, si elle a lieu pour la $(m-1)^{me}$; et, puisqu'elle se vérifie pour les premières, on en doit conclure qu'elle est générale; le terme général du développement de $(x+a)^m$ est donc

$$P.\frac{m}{n}a^nx^{m-n},$$

ou, en remettant pour P sa valeur,

$$\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}\ldots\ldots\frac{m-n+1}{n}a^nx^{m-n};$$

c'est-à-dire, le même que ci-dessus.

Parvenu ainsi au terme général du développement de $(x+a)^m$, il est facile d'en déduire celui du développement de $(a+b+c+\ldots+r)^m$, duquel, par une marche inverse de celle que nous avons suivie dans ce qui précède, on pourra conclure les diverses formules de la théorie des permutations et combinaisons. Il est très-utile à ceux qui étudient les sciences, d'apprendre à parcourir ainsi, en divers sens, la chaîne des propositions dont elles se composent.

Méthode facile pour exécuter le développement des puissances des polynomes;

Pour faire suite à l'article précédent;

Par M. Thomas-Lavernède.

1. Dans le mémoire qui précède, M. Gergonne est parvenu, d'une manière simple et élégante, au terme général du développement d'une puissance quelconque d'un polynome. Je me propose

ici de donner des règles faciles pour effectuer ce développement d'après la connaissance de son terme général.

2. Il vient d'être prouvé que le terme général du développement de $(a+b+c+d+\ldots\ldots)^m$ est

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(m-2)(m-1)m}{1.2\ldots\alpha\times1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times1.2\ldots\delta\times\ldots}a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta\ldots$$

avec la condition $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots=m$; or, ce terme peut être écrit comme il suit:

$$\frac{1.2.3\ldots\alpha.(\alpha+1)\ldots(m-2)(m-1)m}{1.2\ldots\alpha\times1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times1.2\ldots\delta\times\ldots}a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta\ldots\ldots,$$

et deviendra conséquemment, en réduisant,

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots\ldots(\alpha+2)(\alpha+1)}{1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times1.2\ldots\delta\times1\ldots}b^\beta c^\gamma d^\delta\ldots a^\alpha.$$

Mais, par ce qui précède, on a

$$\alpha=m-\beta-\gamma-\delta-\ldots\ldots;$$

il viendra donc, en substituant,

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots\ldots(m-\beta-\gamma-\delta-\ldots\ldots+1)}{1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times1.2\ldots\ldots\delta\times\ldots\ldots\ldots}b^\beta c^\gamma d^\delta\ldots\ldots a^{m-\beta-\gamma-\delta\ldots};$$

ce qui fournit la règle suivante:

Le coefficient d'un produit quelconque des lettres a, b, c, d,.... *dans le développement de* (a+b+c+d+......)^m *est une fraction qui a pour numérateur le produit d'autant de termes consécutifs de la suite* m, m—1, m—2,.... *qu'il y a d'unités dans la somme des exposans des lettres qui multiplient* a, *et pour dénominateur le produit d'autant de termes consécutifs de la suite naturelle, à partir de l'unité, pour chaque lettre qui multiplie* a, *qu'il y a d'unités dans l'exposant de cette lettre.*

3. Concevons présentement que le développement soit ordonné par rapport à a, et considérons, comme un terme unique, l'ensemble de tous ceux qui sont affectés d'une même puissance de cette

lettre. Dans le $n.^{me}$ terme, a^{m-n+1} sera multiplié par tous les produits de $n-1$ dimensions que l'on peut faire avec les lettres b, c, d,.....; et, dans le $(n+1)^{me}$, a^{m-n} sera multiplié par tous les produits de n dimensions que l'on peut faire avec ces mêmes lettres. Or, en supposant déjà formés les produits de $n-1$ dimensions que peuvent fournir les lettres b, c, d,...., il est évident qu'en les multipliant par b, on aura tous ceux de n dimensions qui doivent contenir cette lettre comme facteur; et on aurait de même tous ceux de n dimensions qui doivent renfermer la lettre c, en les multipliant par cette dernière lettre, au lieu de les multiplier par b; mais, comme parmi ces derniers, il y aurait des produits qui renfermeraient le facteur b et que ceux-ci sont déjà déterminés par la première multiplication, il est clair qu'en multipliant par c, il faudra opérer seulement sur les termes de $n-1$ dimensions qui ne contiendront pas le facteur b; réunissant donc les derniers résultats aux premiers, on aura ainsi tous ceux des termes de n dimensions dans lesquels doivent entrer les lettres b et c. Par un semblable raisonnement on trouvera qu'en réunissant à ces termes les produits par d de tous ceux des termes de $n-1$ dimensions qui ne renferment ni b, ni c; les produits par e tous ceux qui ne renferment ni b, ni c, ni d, et ainsi de suite, on parviendra à obtenir tous les produits de n dimensions qu'il est possible de faire avec les lettres b, c, d,..... Nous déduirons de là la règle suivante pour former le $(n+1)^{me}$ terme de la $m.^{me}$ puissance du polynome $a+b+c+d+$......, ordonnée par rapport à a, lorsque le $n.^{me}$ terme de cette puissance est déjà connu.

Multipliez par $\frac{b}{a}$ *tous les produits des lettres* a, b, c, ... *qui entrent dans le* n.^{me} *terme, par* $\frac{c}{a}$ *tous ceux des ces produits qui ne contiennent pas le facteur* b, *par* $\frac{d}{a}$ *tous ceux de ces mêmes produits qui ne contiennent ni* b, *ni* c, *par* $\frac{e}{a}$ *tous ceux qui ne contiennent ni* b, *ni* c, *ni* d, *et ainsi de suite; enfin, donnez*

à chacun des produits obtenus le coefficient que lui assigne la règle prescrite (2).

Cette règle étant générale, et le premier terme du développement de $(a+b+c+d+\ldots\ldots)^m$ étant toujours connu et égal à a^m; il est évident que son application fera trouver successivement tous les autres; elle suffira donc pour développer $(a+b+c+d+\ldots\ldots)^m$ en une suite de monomes.

4. Examinons présentement, d'une manière plus particulière, la loi que suivra le développement; et, pour cela, considérons un produit quelconque $b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots\ldots a^{m-\beta-\gamma-\delta\ldots\ldots}$ dans lequel, β, γ, δ, ... étant des nombres entiers ou zéro, on ait $\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots \leqq m$. Si nous supposons la somme $\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots$ constante et égale à n, quelles que soient d'ailleurs les valeurs particulières des exposans β, γ, δ, ...; il est visible que $b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots\ldots a^{m-n}$ sera l'expression générale des produits des lettres a, b, c, ... qui doivent entrer dans le terme du développement de $(a+b+c+d+\ldots\ldots)^m$ dont le rang est désigné par $\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots+1$ ou $n+1$. Or, nous avons vu (2) que le coefficient de $b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots\ldots a^{m-n}$ est

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(m-2)(m-1)m}{1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times1.2\ldots\delta\times\ldots\ldots\times1.2\ldots\ldots(m-n)},$$

ou ce qui revient au même

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(n+1)n(n-1)\ldots3.2.1}{1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times1.2\ldots\delta\times\ldots\times1.2\ldots(m-n)},$$

ou encore

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots3.2.1}{1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times1.2\ldots\delta\times\ldots}\times\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots\ldots(m-n)};$$

et, comme on a évidemment

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots\ldots(m-n)}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n},$$

on pourra écrire encore

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots3.2.1}{1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times1.2\ldots\delta\times\ldots}\times\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n};$$

d'où il suit que la formule

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots n}{1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times1.2\ldots\delta\times\ldots}b^\beta c^\gamma d^\delta\ldots\times\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\ldots\frac{m-n+1}{n}a^{m-n}$$

représentera généralement les quantités monomes qui doivent composer le $(n+1)^{me}$ terme du développement. Or, dans cette expression, le facteur

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\ldots\ldots\ldots\frac{m-n+1}{n}a^{m-n},$$

est constant, et son co-facteur

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n}{1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times1.2\ldots\delta\times\ldots}b^\beta c^\gamma d^\delta\ldots,$$

qui est variable, à cause des exposans variables α, β, γ, ..., est, d'après le précédent mémoire, le terme général du développement de $(b+c+d+\ldots..)^n$; donc le $(n+1)^{eme}$ terme du développement de $(a+b+c+d+\ldots\ldots)^m$ sera

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\ldots\frac{m-n+1}{n}(b+c+d+\ldots)^n a^{m-n},$$

et conséquemment, en posant $b+c+d+\ldots\ldots=s$, ce développement est

$$a^m+\frac{m}{1}sa^{m-1}+\frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}s^2a^{m-2}+\frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}\,\frac{m-2}{3}s^3a^{m-3}+\ldots$$

comme il résulte d'ailleurs du développement de $(a+s)^m$, par la formule du binome.

5. Il résulte de ce que nous venons de dire, que, m étant un nombre entier positif, le développement de $(a+b+c+\ldots..)^m$, donné par la règle (3), revient à celui qu'on obtiendrait par l'application de la formule du binome; puis donc qu'il est démontré que cette formule a lieu quel que soit l'exposant m, il paraît légitime d'en conclure que la règle dont il s'agit, pourra également être appliquée quel que soit m; ce qui se vérifie, en effet, pour des cas particuliers.

6. Il suit de tout ce qui vient d'être dit 1.°, que p, exprimant le

le nombre des termes du polynome, et m étant un nombre entier positif, la somme des coefficiens des monomes qui composent le développement de $(a+b+c+d+......)^m$ est p^m, ce qu'on aperçoit d'ailleurs sur-le-champ, en supposant $a=b=c=d=.....=1$; 2.° que lorsque l'on connaît, abstraction faite de leurs coefficiens, les monomes qui doivent composer le développement de $(a+b+c+d+...)^m$, on en peut déduire ceux qui doivent entrer dans le développement de $(a+b+c+d...)^{m+1}$, toujours abstraction faite de leurs coefficiens, en les multipliant d'abord tous par a, puis par b tous ceux qui ne contiennent pas a, puis par c ceux qui ne contiennent ni a ni b, par d ceux qui ne contiennent ni a, ni b, ni c, et ainsi de suite; de manière qu'il ne sera plus question alors que d'affecter chacun des termes obtenus du coefficient convenable.

7. Le sujet que nous venons de traiter nous conduit à nous occuper de la recherche des formules qui expriment les puissances entières, et de degrés déterminés, d'un polynome $a+b+c+d+......$, quel que soit le nombre de ses termes. Ces formules peuvent être écrites d'une manière fort simple, et les considérations qui précèdent, fournissent un moyen très-facile de les construire.

8.° Il est d'abord à remarquer que, parmi les termes du développement de $(a+b+c+d+.....)^m$, ceux qui ne diffèrent que par l'ordre suivant lequel se succèdent les mêmes exposans α, β, γ, δ, ..., tels, par exemple, que les termes $a^\alpha b^\beta c^\gamma....$, $a^\beta b^\alpha c^\gamma....$, $a^\gamma b^\alpha c^\beta....$, ... doivent être affectés des mêmes coefficiens, ainsi qu'il résulte de la forme assignée au coefficient du terme général, dans le mémoire précédent, et comme on peut aussi le déduire, *a priori*, de ce que $(a+b+c+d+.....)^m$ est une fonction symétrique des quantités a, b, c, d, ...

Cela posé, désignons par $(\alpha\beta\gamma\delta.....)$ la somme des produits des facteurs a, b, c, d, et de leurs puissances, dans lesquels les exposans sont α, β, γ, δ, ... quelles que soient d'ailleurs les lettres que ces exposans affectent. Dans le développement de $(a+b+c+d+...)^m$, il y aura, outre la classe de produits comprise dans l'expression $(\alpha\beta\gamma.....)$,

Digitized by Google

autant d'autres classes de produits qu'il y aura d'autres manières de satisfaire à la condition $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots=m$ avec des nombres entiers positifs ou nuls, c'est-à-dire, autant qu'il y aura d'autres manières de former le nombre m, par addition, avec des nombres compris dans la suite naturelle, depuis 1 jusqu'à m inclusivement. Nous voilà donc conduits d'abord à cette question: *trouver toutes les manières de former par addition de nombres entiers positifs un nombre donné* m?

Nous indiquerons ici, pour résoudre cette question, deux règles fort simples; et d'abord, pour fixer les idées, nous supposerons que le nombre m qu'il s'agit de former par addition, est 8. Alors toutes les manières de le former seront comprises dans le tableau suivant, dans lequel les chiffres écrits les uns à côté des autres, sans aucune interposition de signe, doivent être considérés comme séparés entre eux par le signe +, et conséquemment comme devant être ajoutés ensemble pour former le nombre demandé.

11111111,	1111112,	111122,	11222,	2222,	224,	26,	8.
		111113,	11123,	1223,	233,	35	
			11114,	1124,	125,	44	
				1133,	134,	17	
				1115,	116,		

La formation de ce tableau présente peu de difficultés. Sa première colonne verticale à gauche n'a qu'un seul terme, et, quel que soit le nombre proposé, ce terme est toujours composé d'autant d'unités que ce nombre en contient. Quant aux autres colonnes, elles se déduisent successivement les unes des autres par la règle que voici:

Pour former la colonne du rang r, *changez deux unités en* 2 *dans les termes de la* (r—1)^{me} *colonne*, *trois unités en* 3 *dans ceux de la* (r—2)^{me} *qui ne renferment pas* 2, *quatre unités en* 4 *dans ceux de la* (r—3)^{me} *qui ne renferment ni* 2 *ni* 3, *et ainsi*

de suite, jusqu'à ce que vous soyez parvenu à la première colonne dans laquelle vous changerez r *unités en* r.

Cette règle étant générale pour toutes les colonnes qui suivent la première; et celle-ci étant toujours connue, il est clair qu'elle fera trouver successivement toutes les colonnes qui doivent composer le tableau, et par conséquent toutes les manières de former, par addition, le nombre donné.

On peut encore disposer le tableau des diverses manières de former le nombre 8 dans l'ordre suivant.

11111111,	1111112,	111122,	11222,	2222;
	111113,	11123,	1223	
	11114,	1124,	224	
	1115,	125,	233	
	116,	26,		
	17,	1133,		
	8,	134,		
		35,		
		44,		

alors chaque colonne dépend uniquement de celle qui la précède, et on forme celle du rang r par la règle qui suit: *changez dans les termes de la* $(r-1)^{me}$ *colonne deux unités en* 2, *puis trois unités en* 3 *dans tous ceux de ces termes qui ne renferment pas* 2, *puis quatre unités en* 4 *dans tous ceux qui ne renferment ni* 2 *ni* 3, *et ainsi de suite; l'ensemble des termes obtenus par ce procédé formera la colonne du rang* r.

On doit observer, dans l'application de l'une ou de l'autre règle, que, si un terme d'une colonne sur laquelle on opère ne contient pas le nombre d'unités nécessaire pour faire l'échange prescrit, ce terme ne doit point être employé dans la recherche de ceux de la colonne que l'on calcule.

Lorsqu'on a obtenu toutes les différentes manières de faire, par addition, le nombre m, on a, d'après la convention établie, toutes les classes de produits qui doivent entrer dans la $m.^{me}$ puissance du polynome $a+b+c+d+\ldots\ldots$; mais nous avons vu que tous les produits d'une même classe doivent avoir le même coefficient; on aura donc une formule qui exprimera le développement de $(a+b+c+d+\ldots)^m$ en donnant à chacune des manières de former le nombre m le coefficient qui convient aux produits dont elle représente la somme. En posant donc, pour abréger

$$a+b+c+d+\ldots\ldots=P$$

on trouvera

$$P^1=(1),$$

$$P^2=(2)+2\,(11),$$

$$P^3=(3)+3\,(12)+6(111),$$

$$P^4=(4)+4\,(13)+12(112)+24(1111),$$
$$+6\,(22)$$

$$P^5=(5)+5\,(14)+20(113)+60(1112)+120(11111),$$
$$+10(23)+30(122)$$

$$P^6=(6)+6(15)+30(114)+120(1113)+360(11112)+720(111111),$$
$$+15(24)+60(123)+180(1122)$$
$$+20(33)+90(222)$$

$$P^7=(7)+7(16)+42(115)+210(1114)+840(11113)+2520(111112)+5040(1111111)$$
$$+21(25)+105(124)+420(1123)+1260(11122).$$
$$+35(34)+140(133)+630(1222).$$
$$+210(223)$$

P^8=(8)+ 8(17)+ 56(116)+ 336(1115)+1680(11114)+ 6720(111113)+20160(1111112)+40320(11111111)
+28(26)+ (125)+ 840(1124)+3360(11123)+10080(111122)
+56(35)+280(134)+1120(1133)+5040(11222)
+70(44)+420(224)+1680(1223)+
+560(283)+2520(2222)

P^9=(9)+ 9(18)+ 72(117)+ 504(1116)+ 3024(11115)+15120(111114)+60480(1111113)+181440(11111112)
+ 36(27)+ 252(126)+1512(1125)+ 7560(11124)+30240(111123)+90720(1111122)
+ 84(36)+ 504(135)+2520(1134)+10080(11133)+45360(111222)
+126(45)+ 756(225)+3780(1224)+15120(11223) +362880(111111111)
+ 630(144)+5040(1233)+22680(12222)
+1260(234)+7560(2223)+
+1680(333)

et ainsi de suite.

9. Je terminerai par les deux observations suivantes. p désignant le nombre des termes du polynome, m le degré de la puissance à développer, et n le nombre des lettres différentes qui doivent entrer dans une même série de termes, 1.° si l'on a $p<m$, toutes les classes dans lesquelles on a $n>p$ doivent être regardées comme nulles, parce que les produits qui leur appartiennent, doivent avoir zéro pour facteur; 2.° si, dans une classe quelconque, représentée par ($\alpha\alpha\ldots\beta\beta\ldots\gamma\gamma\ldots$) les exposans α, β, γ, ..., sont répétés des nombres de fois exprimés respectivement par α', β', γ', ..., le nombre des produits de cette classe aura pour expression

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots\ldots(p-n+1)}{1.2\ldots\alpha'\times 1.2\ldots\beta'\times 1.2\ldots\gamma'\times\ldots}.$$

Cette dernière remarque, qui se déduit aisément de la théorie des combinaisons, offre un moyen de s'assurer que l'on n'omet aucun des produits qui doivent entrer dans la puissance cherchée.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Discussion des équations du second degré entre deux variables ;

Par M. BRET, professeur de mathématiques transcendantes au lycée de Grenoble.



§. 1.

Construction des courbes qui ont un centre.

L'ÉQUATION générale des courbes du second ordre qui ont un centre, peut toujours, comme l'on sait, être facilement ramenée à la forme

$$ay^2+2bxy+cx^2=P; \qquad (1)$$

x et y désignant des coordonnées rectangulaires.

Nous allons chercher à construire, le plus simplement possible, les différentes courbes que cette équation peut représenter.

L'équation

$$gy'^2+hx'^2=P, \qquad (2)$$

construite sur les axes obliques des x', y', déterminés de position par rapport aux premiers, et ayant la même origine, donnera les mêmes courbes, si, en substituant pour x', y', dans l'équation (2), les fonctions équivalentes de x, y, on obtient une équation identiquement la même que l'équation (1).

Or, les formules connues qui donnent les valeurs des coordonnées obliques x', y' en coordonnées rectangulaires, sont

$$x'=\frac{x\text{Sin.}\alpha'-y\text{Cos.}\alpha'}{\text{Sin.}\theta}, \quad y'=\frac{x\text{Sin.}\alpha-y\text{Cos.}\alpha}{-\text{Sin.}\theta};$$

dans lesquelles α' et α désignent respectivement les angles que font les axes de x' et y' avec l'axe des x, du côté des x positifs, et où on a fait, pour abréger $\alpha'-\alpha=\theta$.

Effectuant donc le calcul que nous venons d'indiquer, et exprimant que l'équation résultante est identique avec l'équation (1), il viendra

$$\left.\begin{array}{l} g\text{Cos.}^2\alpha+h\text{Cos.}^2\alpha'=a\text{Sin.}^2\theta\ , \\ g\text{Sin.}^2\alpha+h\text{Sin.}^2\alpha'=c\text{Sin.}^2\theta\ , \\ g\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha+h\text{Sin.}\alpha'\text{Cos.}\alpha'=-b\text{Sin.}^2\theta. \end{array}\right\} \quad (3)$$

De ces équations on déduit facilement, savoir : la valeur de la somme $g+h$, en ajoutant les deux premières, et la valeur du produit gh, en retranchant de leur produit le quarré de la troisième. Ces valeurs sont

$$\left.\begin{array}{l} g+h=(a+c)\text{Sin.}^2\theta\ , \\ gh=(ac-b^2)\text{Sin.}^2\theta\ , \end{array}\right\} \quad (4)$$

et par conséquent l'équation du second degré qui a pour racines g et h, sera

$$z^2-(a+c)z\text{Sin.}^2\theta+(ac-b^2)\text{Sin.}^2\theta=0\ ; \qquad (5)$$

ses racines sont imaginaires lorsqu'on a

$$(a+c)^2\text{Sin}^2.\theta-4(ac-b^2)<0\ ;$$

ce qui emporte la condition

$$ac-b^2>0\ ,$$

et donne

$$\text{Sin.}^2\theta<\frac{4(ac-b^2)}{(a+c)^2}\ ;$$

dans ce cas seulement l'équation (2) cesse de représenter les courbes comprises dans l'équation (1). Ainsi, la plus petite valeur que puisse atteindre $\text{Sin.}\theta$ est donnée par l'équation

$$\text{Sin.}^2\theta=\frac{4(ac-b^2)}{(a+c)^2}\ ;$$

alors les racines de l'équation (5) sont égales, c'est-à-dire, qu'on a

alors $g=h$; ce qui démontre que l'angle obtus formé par les diamètres conjugués égaux est le plus grand de tous ceux que puissent former deux diamètres conjugués.

En éliminant g et h entre les équations (3) on obtient

$$a\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\alpha'+b\{\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha'+\text{Sin.}\alpha'\text{Cos.}\alpha\}+c\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\alpha'=0 ,$$

ou

$$a\text{Tang.}\alpha\text{Tang.}\alpha'+b(\text{Tang.}\alpha+\text{Tang.}\alpha')+c=0 , \qquad (6)$$

cette équation sert à fixer la position des nouveaux axes.

On conclut de tout ce qui précède qu'il y a une infinité de systèmes de coordonnées pour lesquels l'équation des courbes du second ordre qui ont un centre, conserve la forme

$$gy'^2+hx'^2=P. \text{ (*)}$$

Cherchons maintenant si, parmi ces systèmes, il en peut exister de rectangulaires. Supposons l'angle θ droit et prenons l'axe des x', dans l'angle, des x et y positifs; il viendra

$$\text{Cos}\alpha'=-\text{Sin}\alpha , \qquad \text{Sin}\alpha'=\text{Cos}\alpha ;$$

d'après quoi les équations (3) se transformeront en celles-ci

$$a=g\text{Cos.}^2\alpha+h\text{Sin.}^2\alpha ,$$
$$c=g\text{Sin.}^2\alpha+h\text{Cos.}^2\alpha ,$$
$$b=(h-g)\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha ,$$

prenant la différence des deux premières, il viendra

$$a+c=(g-h)(\text{Cos.}^2\alpha-\text{Sin.}^2\alpha) ;$$

or,

$$\text{Cos.}^2\alpha-\text{Sin.}^2\alpha=\text{Cos.}2\alpha \qquad \text{et} \qquad 2\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha=\text{Sin.}2\alpha ;$$

(*) Non seulement il y a une infinité de systèmes de coordonnées pour lesquels l'équation conserve cette forme, mais il n'est aucune droite menée par le centre de la courbe, qui ne puisse être prise pour l'un des axes d'un de ces systèmes; et c'est là un point sur lequel il conviendrait d'appuyer un peu plus dans les élémens.

(*Note des éditeurs.*)

donc

donc

$$\text{Cos.}2\alpha=\frac{a-c}{g-h}\,,\quad \text{Sin.}2\alpha=\frac{2b}{h-g}\,,\quad \text{d'où}\quad \text{Tang.}2\alpha=-\frac{2b}{a-c}\,;$$

cette dernière formule fait connaître la direction des axes principaux.

Mais il est nécessaire de distinguer, par quelques caractères, la valeur de g de celle de h. Pour cela nous observerons que α étant, par hypothèse, moindre que le quadrans, 2α est plus petit que deux angles droits; d'où il suit que Sin.2α est positif: la différence $h-g$ aura donc le signe qui affectera b; c'est-à-dire, que, si b est positif, on prendra pour h la plus grande racine, et que, si b est négatif, on choisira, au contraire, pour h la plus petite de ces racines. Ainsi, par ce qui précède, les courbes du second ordre qui ont un centre, se trouvent entièrement connues de grandeur et de situation par rapport aux axes primitifs.

Les racines de l'équation

$$z^2-(a+c)z+(ac-b^2)=0$$

sont essentiellement réelles.

1.° Si ces racines sont de même signe, la courbe est une *ellipse*.

2.° Si elles sont de signes contraires, la courbe est une *hyperbole*.

3.° Si, en particulier, elles sont numériquement égales, la courbe sera un *cercle* ou une *hyperbole équilatérale*.

On déduit très-simplement des équations (4 et 6) les relations qui ont lieu entre les grandeurs des axes principaux et les grandeurs et directions des diamètres conjugués. Considérons, en effet, l'équation

$$gy'^2+hx'^2=P$$

dans deux systèmes différens de coordonnées; nous aurons deux équations correspondantes des mêmes courbes auxquelles nous donnerons les formes suivantes:

$$\pm\frac{y^2}{B^2}+\frac{x^2}{A^2}=1\,,\quad \pm\frac{y'^2}{B'^2}+\frac{x'^2}{A'^2}=1.$$

La première, dans laquelle x, y désignent des coordonnées rec-

tangulaires, répond à l'équation (1); et la seconde, dans laquelle x', y' expriment des coordonnées obliques, répond à l'équation (2). Comparant ces équations entre elles, on obtient

$$a=\pm\frac{1}{B^2}\,,\quad b=0\,,\quad c=\frac{1}{A^2}\,,\quad g=\pm\frac{1}{B'^2}\,,\quad h=\frac{1}{A'^2}$$

d'après quoi les équations (4 et 6) deviennent

$$\pm\frac{1}{B'^2}+\frac{1}{A'^2}=\left(\pm\frac{1}{B^2}+\frac{1}{A^2}\right)\text{Sin.}^2\theta\,,$$

$$\frac{1}{A'^2B'^2}=\frac{1}{A^2B^2}\text{Sin.}^2\theta\,,$$

$$\pm\frac{1}{B^2}\text{Tang.}\alpha\text{Tang.}\alpha'+\frac{1}{A^2}=0\,;$$

d'où on déduit, sur-le-champ, les relations connues

$AB=A'B'\text{Sin.}(\alpha'-\alpha)$, $A^2\pm B^2=A'^2\pm B'^2$, $A^2\text{Tang.}\alpha\text{Tang.}\alpha'\pm B^2=0$.

Nous terminerons par l'application de ces méthodes à la construction d'une ellipse donnée par l'équation

$$5y^2+2xy+5x^2-12y-12x=0\,;$$

en portant l'origine au centre, dont les coordonnées sont l'une et l'autre égales à l'unité, cette équation deviendra

$$5y^2+2xy+5x^2=12.$$

Reprenant alors les formules

$$ay^2+2bxy+cx^2=P\,,\qquad gy'^2+hx'^2=P$$

$$\text{Sin.}2\alpha=\frac{2b}{h-g}\,,\qquad \text{Tang.}2\alpha=-\frac{2b}{a-c}$$

$$z^2-(a+c)z+(ac-b^2)=0$$

on trouve

$$\text{Sin.}2\alpha=\frac{2}{h-g}\,,\qquad \text{Tang.}2\alpha=\infty$$

$$z^2-10z+24=0,\ \text{d'où } z=4 \text{ ou } 6\,;$$

or, comme $\text{Sin.}2\alpha$ doit être positif, il s'ensuit que $h=6$, $g=4$; en sorte que l'ellipse a pour équation

$$6x'^2+4y'^2=12\,,\ \text{ou}\ 3x'^2+2y'^2=6.$$

§. 2.

Construction de la parabole.

L'équation générale de la parabole est

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f=0\,,$$

en écrivant que $b^2=ac$

Si on la résout successivement par rapport à x et par rapport à y, on trouvera

$$y=-\frac{bx+d}{a}\pm\frac{1}{a}\sqrt{2(bd-ae)x+(d^2-af)}\,,$$

$$x=-\frac{by+e}{c}\pm\frac{1}{c}\sqrt{2(be-cd)y+(e^2-cf)}\,.$$

Soient ensuite posées les équations

$$ay+bx+d=0\,, \qquad (1)$$

$$by+cx+e=0\,, \qquad (2)$$

$$2(bd-ae)x+(d^2-af)=0\,, \qquad (3)$$

$$2(be-cd)y+(e^2-cf)=0\,. \qquad (4)$$

Soient désignés par A et B les points où la droite (3) coupe les diamètres (1) et (2), et par C et D ceux où la droite (4) rencontre ces mêmes diamètres. On voit que ces droites (3) et (4) sont tangentes à la parabole aux points A et D. Si maintenant des points A et D on abaisse sur les droites (2) et (1) des perpendiculaires qui aboutissent respectivement aux points E et F de ces lignes, et qu'ensuite on joigne le point A au milieu de BE et le point D au milieu de CF, par deux droites, ces droites se couperont au sommet S de la parabole.

Cette construction est fondée sur cette propriété de la parabole rapportée soit à son axe soit à ses diamètres, savoir : que la soustangente est double de l'abscisse du point de contact.

On peut employer une construction semblable pour déterminer d'autres points que le sommet. Si, en effet, au lieu d'abaisser des points A et D des perpendiculaires sur les diamètres (2) et (1), on mène, par ces points, des parallèles AE, DF, sous un angle quelconque; en continuant la construction, comme ci-dessus, on obtiendra le point de la parabole où sa tangente est parallèle aux droites AE ou DF.

Ayant le sommet, il est facile de trouver le foyer; il suffit, en effet, pour cela de mener le rayon vecteur du point A, c'est-à-dire, de mener par le point A une droite faisant avec la droite (1) un angle égal à celui que fait celle-ci avec la droite (3), cette droite par sa rencontre avec l'axe de la courbe qui est maintenant connu, déterminera le point cherché. On pourrait aussi déterminer le foyer par l'intersection des rayons vecteurs des points A et D; mais quelquefois ces rayons vecteurs pourraient se confondre.

Ayant ainsi le sommet et le foyer de la courbe, il est facile de la tracer, soit par points, soit par un mouvement continu.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de Probabilité.

DEUX joueurs, dont chacun a un nombre de jetons connu, et dont les adresses respectives sont m et n, conviennent de ne quitter le jeu que lorsque l'un d'eux aura gagné tous les jetons de l'autre. A chaque partie le perdant donne un jeton au gagnant; on demande quelle est l'espérance de chaque joueur ? (*)

Problème de Géométrie.

A un polygone donné circonscrire un polygone de même nom, dont les angles soient respectivement égaux à des angles donnés, et dont l'aire ou le contour soit donné ?

(*) On pourrait aussi demander quelle est la probabilité que le jeu finira après un nombre de parties déterminé ?

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Recherche de quelques propriétés des tangentes aux sections coniques ;

Par M. Rochat, professeur de navigation à St-Brieux.

Soit $A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$ l'équation d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes ; soient de plus

$$y=ax+b\ , \qquad y=a'x+b'\ ,$$

les équations de deux droites quelconques.

Nous exprimerons que ces droites sont tangentes à l'ellipse, en écrivant

$$A^2a^2+B^2=b^2\ ; \qquad A^2a'^2+B^2=b'^2\ ,$$

ou bien

$$A^2a^2+B^2=y^2-2axy+a^2x^2\ ,$$
$$A^2a'^2+B^2=y^2-2a'xy+a'^2x^2\ ,$$

ou encore

$$a^2+\frac{2xy}{A^2-x^2}a+\frac{B^2-y^2}{A^2-x^2}=0\ ,$$

$$a'^2+\frac{2xy}{A^2-x^2}a'+\frac{B^2-y^2}{A^2-x^2}=0\ ;$$

d'où l'on voit que a et a' sont racines d'une même équation qui n'est autre que l'une des deux précédentes, et qu'ainsi on doit avoir

$$\frac{B^2-y^2}{A^2-x^2}=aa'. \qquad \text{(M)}$$

Si l'on suppose le produit aa' constant et négatif, l'équation (M) sera

$$y^2+aa'x^2=B^2+aa'A^2 ;$$

elle appartiendra donc à une ellipse concentrique à la première, dont les axes $2A'$, $2B'$ auront même direction que les axes primitifs, et seront déterminés par les équations

$$A'^2=\frac{B^2+aa'A^2}{aa'}, \qquad B'^2=B^2+aa'A^2 ;$$

en sorte que leur rapport sera

$$\frac{B'}{A'}=\sqrt{aa'}.$$

Si l'on suppose au contraire le produit aa' constant, mais positif, l'équation (M) deviendra

$$y^2-aa'x^2=B^2-aa'A^2 ;$$

elle appartiendra donc alors à une hyperbole concentrique à l'ellipse proposée ; les axes $2A'$ et $2B'$ de cette hyperbole, qui auront encore même direction que les axes primitifs, seront déterminés par les équations

$$A'^2=-\frac{B^2-aa'A^2}{aa'}, \qquad B'^2=B^2-aa'A^2 ;$$

en sorte que leur rapport sera

$$\frac{B'}{A'}=\sqrt{aa'} ;$$

et, suivant que aa' sera plus grand ou plus petit que $\frac{B^2}{A^2}$, l'axe transverse de cette hyperbole sera dirigé suivant le grand ou le petit axe de l'ellipse.

Comme on parviendrait évidemment aux mêmes conséquences, en rapportant l'ellipse à son petit axe, on peut établir le théorème suivant :

THÉORÈME. Si deux droites touchant continuellement une même ellipse, se meuvent de manière que le produit des tangentes trigonométriques des angles qu'elles forment avec l'un des axes soit cons-

tant, le point d'intersection de ces deux droites décrira une section conique concentrique à l'ellipse proposée, et dont les axes auront mêmes directions que ceux de cette ellipse.

En général, cette section conique sera une ellipse *ou une* hyperbole, *suivant que le produit constant sera* négatif *ou* positif. *Dans l'un et dans l'autre cas, le rapport des deux axes de la section conique sera la racine quarrée du produit constant.*

Si à l'ellipse qui a pour équation

$$y^2+aa'x^2=B^2+aa'A^2,$$

et dont les axes $2A'$ et $2B'$ sont conséquemment déterminés par les équations

$$A'^2=\frac{B^2+aa'A^2}{aa'}, \qquad B'^2=B^2+aa'A^2\ ;$$

si à cette ellipse, disons-nous, on mène deux tangentes de manière que le produit aa' conserve la même valeur que précédemment et soit négatif, la courbe décrite par ces nouvelles tangentes sera une troisième ellipse dont les axes $2A''$, $2B''$ seront déterminés par les équations

$$A''^2=\frac{B'^2+aa'A'^2}{aa'}, \qquad B''^2=B'^2+aa'A'^2\ ;$$

mettant pour B'^2 et A'^2 leurs valeurs déjà déterminées, il viendra

$$A''^2=\frac{2(B^2+aa'A^2)}{aa'}=2A'^2, \qquad B''^2=2(B^2+aa'A^2)=2B'^2.$$

Si, en observant les mêmes conditions, on cherche le lieu de l'intersection des deux tangentes menées à cette troisième ellipse, on en déterminera une quatrième dont les axes $2A'''$, $2B'''$ seront donnés par les équations

$$A'''^2=2A''^2\ ; \qquad B'''^2=2B''^2,$$

et ainsi de suite : on aura donc

$$\sqrt{aa'}=\frac{B'}{A'}=\frac{B''}{A''}=\frac{B'''}{A'''}=\ldots\ldots;$$

ce qui donne lieu à ce théorème.

THÉORÈME. Si deux droites, touchant continuellement une même ellipse, se meuvent de manière que le produit des tangentes trigonométriques des angles qu'elles forment avec l'un des axes soit constant et négatif, le point d'intersection des deux tangentes décrira une seconde ellipse. Si on conçoit deux tangentes à cette seconde ellipse, mobiles comme les premières, et assujetties aux mêmes conditions qu'elles, l'intersection de ces dernières décrira une troisième ellipse de laquelle, en suivant les mêmes procédés, on en pourra déduire une quatrième, et ainsi de suite. Cela posé :

1.° Toutes les ellipses construites sur la première seront semblables entre elles ; elles lui seront concentriques, et leurs axes auront la même direction que les siens.

2.° Les aires de ces ellipses formeront une progression croissante par quotiens dont la raison sera $=2$.

3.° Enfin les tangentes dont l'intersection décrira l'une quelconque de ces ellipses, seront continuellement parallèles à deux cordes supplémentaires de l'ellipse qui la précédera immédiatement, dans l'ordre de leur génération successive.

Considérons présentement quelques cas particuliers.

Soit 1.° $aa'=-1$; dans ce cas l'équation (M) deviendra simplement

$$y^2+x^2=A^2+B^2 \; ;$$

ce qui donne ce théorème connu :

THÉORÈME. Si les deux côtés d'un angle droit mobile sont continuellement tangens à une même ellipse, son sommet décrira un cercle concentrique à cette ellipse, et ayant pour rayon la corde qui joint l'une des extrémités du grand axe à l'une des extrémités du petit.

Soit 2.° $aa'=+1$; l'équation (M) deviendra alors

$$y^2-x^2=-(A^2-B^2) \; ;$$

ainsi, dans ce cas, le lieu du point d'intersection des deux tangen-

tes mobiles, est une hyperbole équilatérale dont les axes sont égaux à la distance entre les foyers de l'ellipse.

Soit 3.° $aa'=-\frac{B^2}{A^2}$ l'équation (M) deviendra

$$A^2y^2+B^2x^2=2A^2B^2 ;$$

on aura donc une ellipse dont les demi-axes seront $A\sqrt{2}$, $B\sqrt{2}$; et, comme $\frac{B\sqrt{2}}{A\sqrt{2}}=\frac{B}{A}$ et $(A\sqrt{2})^2=2A^2$, cette ellipse sera semblable à la première, et son aire sera double de la sienne; la condition $aa'=-\frac{B^2}{A^2}$ convenant d'ailleurs aux cordes supplémentaires de l'ellipse proposée, on en peut conclure ce théorème :

THÉORÈME. Si deux droites mobiles, continuellement tangentes à une même ellipse, sont constamment parallèles à deux cordes supplémentaires de cette ellipse, le lieu géométrique de l'intersection de ces deux tangentes sera une autre ellipse, concentrique et semblable à la première, ayant ses axes dans la même direction et dont l'aire sera double de la sienne (*).

Soit 4.° $aa'=+\frac{B^2}{A^2}$; l'équation (M) donnera

$$y=\pm\frac{B}{A}x ;$$

c'est-à-dire, qu'on aura alors, pour le lieu géométrique cherché, les diagonales du rectangle des axes.

Si, dans tout ce qui précède, on change B en $B\sqrt{-1}$, la courbe primitive sera une hyperbole, et on pourra établir, pour cette courbe, des théorèmes analogues aux précédens.

Enfin, en appliquant le même procédé à la parabole, on parvient à ce théorème.

THÉORÈME. Si deux droites mobiles, touchant continuellement

(*) Ce théorème est un corollaire du deuxième de ceux qui précèdent.

une même parabole se meuvent de manière que le produit des tangentes trigonométriques de leur inclinaison à l'axe de cette parabole soit constant, le lieu de l'intersection de ces deux droites sera une droite indéfinie perpendiculaire à cet axe.

Cette droite indéfinie sera la directrice de la parabole, si les deux tangentes sont constamment perpendiculaires l'une à l'autre.

St-Brieux, le 20 de novembre 1811.

ANALISE INDÉTERMINÉE.

Résolution, en nombres entiers positifs, de l'équation générale du premier degré à deux indéterminées.

Par M. PILATTE, professeur de mathématiques spéciales au lycée d'Angers.



Nous nous proposons ici de résoudre en nombres entiers positifs, lorsque cela est possible, l'équation du premier degré à deux indéterminées

$$a_1x+ax_1=b.$$

En supposant que a, a_1, b sont des nombres entiers, que a et a_1 sont premiers entre eux, et qu'on a $a>a_1$, nous aurons à considérer successivement les trois équations

$$a_1x+ax_1=b,$$
$$a_1x-ax_1=b,$$
$$ax_1-a_1x=b;$$

ce sont, en effet, les seules variétés de la proposée, compatibles avec les conditions du problème.

§. I.

Solution de l'équation $a_1 x + a x_1 = b$.

Opérons sur a et a_1, comme si nous cherchions leur plus grand commun diviseur; nommons a_2, a_3, ... a_{n-1}, a_n les restes successifs dont le dernier sera nécessairement égal à l'unité, et q_1, q_2, q_3, ... q_{n-1}, q_n les quotiens, nous aurons cette suite d'équations

$$\left.\begin{aligned} a &= a_1 q_1 + a_2 , \\ a_1 &= a_2 q_2 + a_3 , \\ a_2 &= a_3 q_3 + a_4 , \\ &\dots\dots\dots\dots , \\ a_{n-2} &= a_{n-1} q_{n-1} + a_n , \\ a_{n-1} &= q_n . \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Mettant pour a sa valeur dans la proposée, divisant par a_1 et transposant, on aura

$$x = \frac{b - a_2 x_1}{a_1} - q_1 x_1 ;$$

mais x, x_1 devant être des nombres entiers, et q_1 étant lui-même un nombre entier, en désignant par x_2 un nombre entier indéterminé, on devra avoir

$$x_2 = \frac{b - a_2 x_1}{a_1} , \text{ d'où } a_2 x_1 + a_1 x_2 = b ;$$

ainsi l'on a

d'une part $\quad x = x_2 - q_1 x_1$,

et de l'autre $\quad a_2 x_1 + a_1 x_2 = b$.

Opérant sur cette dernière équation, comme sur la proposée, en continuant les mêmes raisonnemens et les hypothèses analogues, nous formerons ces deux séries d'équations

$$\left.\begin{array}{l} a_1\,x\;+a\;\;x_1=b\,,\\ a_2\,x_1+a_1\,x_2=b\,,\\ a_3\,x_2+a_2\,x_3=b\,,\\ \dots\dots\dots\dots\,,\\ a_{n-2}x_{n-3}+a_{n-3}x_{n-2}=b\,,\\ a_{n-1}x_{n-2}+a_{n-2}x_{n-1}=b\,,\\ \quad x_{n-1}+a_{n-1}x_n\;=b\,; \end{array}\right\}\text{(B)}\qquad \left.\begin{array}{l} x\;\;=x_2\;-q_1\;x_1\;;\\ x_1=x_3\;-q_2\;x_2\;,\\ x_2=x_4\;-q_3\;x_3\;,\\ \dots\dots\dots\dots\,,\\ x_{n-3}=x_{n-1}-q_{n-2}x_{n-2}\,,\\ x_{n-2}=x_n\;-q_{n-1}x_{n-1}\,,\\ x_{n-1}=b\;\;-a_{n-1}x_n\,, \end{array}\right\}\text{(C)}$$

Si maintenant on substitue la valeur de x_{n-1} dans celle de x_{n-2}, celle-ci dans celle de x_{n-3}, et ainsi de suite on parviendra, à la fin, à des valeurs entières des x_1 et x; mais, en exécutant ces substitutions, on s'aperçoit bientot qu'elles deviennent plus faciles et plus symétriques, en posant d'abord les équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{n-1}=1\;,\\ \alpha_{n-2}=\alpha_{n-1}q_{n-1}\;,\\ \alpha_{n-3}=\alpha_{n-2}q_{n-2}+\alpha_{n-1}\;,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\;;\\ \alpha_2\;=\alpha_3\;q_3\;+\alpha_4\;,\\ \alpha_1\;=\alpha_2\;q_2\;+\alpha_3\;,\\ \alpha\;\;=\alpha_1\;q_1\;+\alpha_2\;, \end{array}\right\}\text{(D)}$$

Procédant alors aux substitutions, on aura pour 1.re équation

$$x_{n-1}=\alpha_{n-1}b-a_{n-1}x_n\;,$$

puis $$x_{n-2}=-\alpha_{n-1}q_{n-1}b+(a_{n-1}q_{n-1}+1)x_n\;;$$

observant alors que, par les équations (D), $\alpha_{n-1}q_{n-1}=\alpha_{n-2}$, et que par les équations (A), $a_{n-1}q_{n-1}+1=a_{n-2}$, il viendra

$$x_{n-2}=-\alpha_{n-2}b+a_{n-2}x_n.$$

En continuant ce procédé, on formera le système d'équations

x_{n-1}

$$\left.\begin{aligned}
x_{n-1} &= +\alpha_{n-1}b-a_{n-1}x_n\,,\\
x_{n-2} &= -\alpha_{n-2}b+a_{n-2}x_n\,,\\
x_{n-3} &= +\alpha_{n-3}b-a_{n-3}x_n\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\\
x_2 &= \pm\alpha_2\ b\mp a_2\ x_n\,,\\
x_1 &= \mp\alpha_1\ b\pm a_1\ x_n\,,\\
x &= \pm\alpha\ b\mp a\ x_n\,;
\end{aligned}\right\}\ (E)$$

équations dans lesquelles il faudra prendre les signes *supérieurs* ou les signes *inférieurs*, suivant que n sera *impair* ou *pair*. Cette remarque s'étendant également à tout ce qui va suivre, nous nous dispenserons de la répéter.

Pour calculer rapidement les valeurs des inconnues x_1 et x, on cherchera d'abord les quotiens q_1, q_2, q_3, ..., $q_n=a_{n-1}$; on écrira ensuite α_{n-1} ou 1 sous le quotient q_{n-1} ; on multipliera q_{n-1} par 1 et l'on aura α_{n-2} qu'on écrira sous q_{n-2} ; on multipliera q_{n-2} par α_{n-2}, au produit on ajoutera α_{n-1} ou 1, et l'on aura α_{n-3} qu'on écrira sous q_{n-3} ; on multipliera q_{n-3} par α_{n-3}, au produit on ajoutera α_{n-2}, et l'on aura α_{n-4} : on continuera ainsi jusqu'à ce qu'on soit parvenu à α_1 et α.

Nous ne répéterons pas ici les remarques connues, sur les diverses valeurs qu'on peut obtenir pour x et x_1 ; nous observerons seulement que, bien que le nombre entier x_n puisse être pris à volonté, il est néanmoins compris entre certaines limites, déterminées par la condition que x et x_1 soient des nombres entiers positifs ; il faudra donc qu'on ait généralement.

$$x_n\left\{\begin{aligned} &<\frac{\alpha b}{a}\,,\\ &>\frac{\alpha_1 b}{a_1}\,,\end{aligned}\right\}\ \text{si } n \text{ est impair},$$

$$x_n \left\{ \begin{array}{l} > \frac{\alpha b}{a}, \\ < \frac{\alpha_1 b}{a_1}, \end{array} \right\} \text{si } n \text{ est pair.}$$

Il y aura autant de solutions différentes qu'il se trouvera de nombres entiers compris entre $\frac{\alpha b}{a}$ et $\frac{\alpha_1 b}{a_1}$; et, s'il ne s'en trouve aucun entre ces deux limites, la proposée n'aura aucune solution en nombres entiers positifs.

On peut, à la simple inspection de la proposée, assigner, au moins à une unité près, le nombre des solutions qu'elle peut admettre.

En effet, depuis $\frac{\alpha b}{a}$ jusqu'à $\frac{\alpha_1 b}{a_1}$, il doit y avoir au moins autant de nombres entiers ou, au plus, autant de nombres entiers plus un que la différence $\pm\left(\frac{\alpha b}{a}-\frac{\alpha_1 b}{a_1}\right)$ contient d'unités entières; mais on a

$$\begin{aligned}\pm\left(\frac{\alpha b}{a}-\frac{\alpha_1 b}{a_1}\right) &= \pm\frac{b}{aa_1}\left(a_1\alpha - a\alpha_1\right) \\ &= \mp\frac{b}{aa_1}\left(a_2\alpha_1 - a_1\alpha_2\right) \\ &= \pm\frac{b}{aa_1}\left(a_3\alpha_2 - a_2\alpha_3\right) \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \frac{b}{aa_1}\alpha_{n-1} = \frac{b}{aa_1};\ (*)\end{aligned}$$

donc la proposée admet autant de solutions, au moins, en nombres

(*) Pour obtenir ces résultats, il faut d'abord substituer pour a et α, ensuite pour a_1 et α_1, a_2 et α_2 etc., leurs valeurs tirées des équations (A) et (D). Il est de plus essentiel de se rappeler qu'il faut prendre les signes *supérieurs* ou *inférieurs*, suivant que n est *impair* ou *pair*.

positifs, qu'il y a d'unités entières dans $\frac{b}{aa_1}$, et elle ne peut en admettre qu'une de plus.

§. 2.

Solution de l'équation $a_1x - ax_1 = b$.

La méthode à suivre dans ce second cas est exactement la même que pour le premier. En conséquence, les systèmes (A) et (D) ne subissent aucun changement, et il suffit d'indiquer les modifications qu'éprouvent les systèmes (B), (C), (E) qui deviennent alors

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x - a x_1 = +b, \\ a_2 x_1 - a_1 x_2 = -b, \\ a_3 x_2 - a_2 x_3 = +b, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ a_{n-2}x_{n-3} - a_{n-3}x_{n-2} = \pm b, \\ a_{n-1}x_{n-2} - a_{n-2}x_{n-1} = \mp b, \\ x_{n-1} - a_{n-1}x_n = \pm b; \end{array}\right\} (B') \qquad \left.\begin{array}{l} x = x_2 + q_1 x_1, \\ x_1 = x_3 + q_2 x_2, \\ x_2 = x_4 + q_3 x_3, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ x_{n-3} = x_{n-1} + q_{n-2}x_{n-2}, \\ x_{n-2} = x_n + q_{n-1}x_{n-1}, \\ x_{n-1} = \pm b + a_{n-1}x_n, \end{array}\right\} (C')$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{n-1} = \pm \alpha_{n-1} b + a_{n-1} x_n, \\ x_{n-2} = \pm \alpha_{n-2} b + a_{n-2} x_n, \\ x_{n-3} = \pm \alpha_{n-3} b + a_{n-3} x_n, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ x_2 = \pm \alpha_2 b + a_2 x_n, \\ x_1 = \pm \alpha_1 b + a_1 x_n, \\ x = \pm \alpha b + a x_n, \end{array}\right\} (E')$$

On voit qu'ici x_n ne sera susceptible que d'une seule limite. Si n est impair, on pourra prendre pour x_n un nombre entier positif quelconque, et même un nombre négatif, pourvu qu'il ne soit pas plus grand que la plus petite des deux quantités $\frac{\alpha b}{a}$, $\frac{\alpha_1 b}{a_1}$.

Si n est pair, on ne pourra prendre pour x_n qu'un nombre positif, et ce nombre ne devra pas être moindre que la plus grande des deux quantités $\frac{\alpha b}{a}$, $\frac{\alpha_1 b}{a_1}$.

§. 3.

Solution de l'équation $ax_1 - a_1x = b$.

En mettant cette équation sous la forme $a_1x - ax_1 = -b$, on voit qu'elle ne diffère de celle qui vient d'être discutée que par le signe de b; il suffira donc, pour la résoudre, de changer le signe de b, dans toutes les formules du §. 2 : on aura donc

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \mp\alpha_1 b + a_1 x_n \,, \\ x = \pm\alpha\, b + a\, x_n \,. \end{array}\right\} \text{(E'')}$$

Il faudra donc appliquer à n pair ce qui a été dit de n impair, *et vice versâ*.

Applications.

1.° Soit l'équation $13x + 19x_1 = 1000$, qui se rapporte au §. 1. On a d'abord $\frac{b}{aa_1} = \frac{1000}{13.19} > 4$; il y aura donc quatre solutions au moins et cinq au plus.

Suite des diviseurs	a, a_1, a_2, a_3	19	13	6	1
Suite des quotiens	q_1, q_2, q_3		1	2	6
Suite des quantités	α, α_1, α_2	3,	2,	1.	

Puisque $n=3$ est un nombre impair, on aura, en remplaçant x_n par e.

$$x_1 = -2.1000 + 13e\,,$$

$$x = +3.1000 - 19e\,;$$

d'où on conclura

$$e \left\{ \begin{array}{l} > \frac{2000}{13} = 153 + \frac{11}{13}\,, \\ < \frac{3000}{19} = 157 + \frac{17}{19}\,; \end{array}\right.$$

on fera donc successivement $e=154\,,\ 155\,,\ 156\,,\ 157\,;$

et l'on aura .... $\begin{cases} x_1 = \ \ 2\,, & 15\,, & 28\,, & 41\,, \\ x = 74\,, & 55\,, & 36\,, & 17\,. \end{cases}$

2.° Soit encore l'équation $39x-56x_1=11$, qui se rapporte au §. 2. On aura ici

Suite des diviseurs	$a\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ a_4\,,\ a_5 \ldots$	$56\ \left|\frac{39}{1}\right|\frac{17}{2}\left|\frac{5}{3}\right|\frac{2}{2}\left|\frac{1}{2}\right.$
Suite des quotiens	$q_1\,,\ q_2\,,\ q_3\,,\ q_4\,,\ q_5 \ldots$	
Suite des coefficiens	$\alpha\,,\ \alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \alpha_3\,,\ \alpha_4 \ldots$	$23\,,\ 16\,,\ 7\,,\ 2\,,\ 1.$

Et, puisque $n=5$ est impair, il viendra, en remplaçant toujours x_n par e,

$$x_1=+16.11+39e=+176+39e\,;$$
$$x=-23.11+56e=-253+56e\,;$$

faisant donc .... $e= \ 5\,, \ \ 6\,, \ \ 7\,, \ \ 8\,, \ldots\ldots$

on trouvera .... $\begin{cases} x_1=371\,, & 410\,, & 449\,, & 488\,, \ldots\ldots \\ x= \ \ 27\,, & 83\,, & 139\,. & 195\,, \ldots\ldots \end{cases}$

Ces deux exemples sont tirés de l'algèbre d'Euler.

ASTRONOMIE.

Formules pour la détermination de l'obliquité de l'écliptique, et du lieu de l'équinoxe;

Par M. Gergonne.



Soient α, α' deux ascensions droites du centre du soleil rapportées à une même étoile quelconque, et soient a, a' les ascensions droites du même astre comptées depuis l'équinoxe ; soient δ et δ' les déclinaisons correspondantes prises avec leurs signes, et soit enfin ω l'obli-

quité de l'écliptique. On aura, par la théorie des triangles sphériques rectangles,

$$\text{Sin.}a\,\text{Tang.}\alpha=\text{Tang.}\delta\ ,\quad \text{Sin.}a'\,\text{Tang.}\alpha=\text{Tang.}\delta'\ ;$$

on aura de plus

$$a'-a=\alpha'-\alpha\ ,\quad \text{d'où}\quad a'=a+(\alpha'-\alpha)\ ,$$

et conséquemment

$$\text{Sin.}a'=\text{Sin.}a\,\text{Cos.}(\alpha'-\alpha)+\text{Cos.}a\,\text{Sin.}(\alpha'-\alpha)\ ,$$

substituant, dans cette équation, pour Sin.a et Sin.a', les valeurs que donnent les deux premières, elle deviendra, en transposant,

$$\text{Tang.}\alpha\,\text{Sin.}(\alpha'-\alpha)\text{Cos.}a=\text{Tang.}\delta'-\text{Tang.}\delta\,\text{Cos.}(\alpha'-\alpha)\ ;$$

mais la première des équations ci-dessus étant multipliée par Sin.$(\alpha'-\alpha)$ devient

$$\text{Tang.}\alpha\,\text{Sin.}(\alpha'-\alpha)\text{Sin.}a=\text{Tang.}\delta\,\text{Sin.}(\alpha'-\alpha)\ ;$$

ajoutant donc les quarrés de ces deux équations, et ayant égard à ce que

$$\text{Sin.}^2a+\text{Cos.}^2a=1\ ,\quad \text{Sin.}^2(\alpha'-\alpha)+\text{Cos.}^2(\alpha'-\alpha)=1\ ,$$

on en tirera

$$\text{Tang.}\alpha=\frac{\sqrt{\text{Tang.}^2\delta-2\text{Tang.}\delta.\text{Tang.}\delta'\text{Cos.}(\alpha'-\alpha)+\text{Tang.}^2\delta'}}{\text{Sin.}(\alpha'-\alpha)}\ .$$

On calculera aisément le numérateur de cette valeur en considérant que c'est un côté d'un triangle rectiligne dont les deux autres sont Tang.δ et Tang.δ' et dont l'angle compris entre eux est $\alpha'-\alpha$.

Mais, quelque symétrique que soit cette formule, on préférera sans doute, pour le calcul par logarithmes, le procédé que voici : on posera d'abord

$$\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(\delta'+\delta)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(\delta'-\delta)}\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)=\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(\theta'+\theta)\ ,$$

$$\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(\delta'+\delta)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}(\delta'-\delta)}\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)=\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(\theta'-\theta)\ ;$$

par ces formules on déterminera les angles auxiliaires θ', θ, et l'on aura ensuite

$$\text{Cos.}\omega=\text{Cos.}\gamma'\text{Sin.}\theta'=\text{Cos.}\gamma\text{Sin.}\theta.$$

L'obliquité de l'écliptique se trouvant ainsi déterminée, on déterminera la position de l'équinoxe par l'une ou l'autre des deux équations

$$\text{Sin.}a=\text{Tang.}\gamma\text{Cot.}\omega\ ,\quad \text{Sin.}a'=\text{Tang.}\gamma'\text{Cot.}\omega.$$

Si l'on a le choix entre plusieurs observations, et qu'on ne veuille en employer que deux, il faudra les choisir de préférence, de manière qu'elles ne soient pas trop rapprochées soit entre elles, soit des solstices, et qu'elles ne comprennent pas un solstice entre elles. Le mieux sera peut-être de les prendre à environ six semaines avant et après l'équinoxe.

Mais, dans le cas où l'on aura plus de deux observations, il sera plus convenable de les combiner deux à deux de toutes les manières différentes; n observations donneront ainsi $\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}$ résultats desquels on pourra déduire un résultat moyen très-approché. On pourra aussi de cette manière suivre, pendant un long temps, toutes les variations que l'obliquité de l'écliptique pourra éprouver.

J'ai été toujours surpris que des méthodes si simples n'aient été consignées jusqu'ici dans aucun traité d'astronomie (*). Il peut bien se faire qu'elles présentent quelques inconvéniens dans l'application; mais, comme elles s'offrent, pour ainsi dire, d'elles-mêmes à la pensée, il serait du devoir des astronomes de nous expliquer les motifs qui les déterminent à les rejeter.

(*) M. Biot, dans la nouvelle édition de son *Traité élémentaire d'astronomie physique* (note de la page 15 du 2.e volume), indique bien cette méthode; mais seulement comme moyen de vérification du mouvement du soleil, suivant un grand cercle de la sphère céleste. Il ne donne d'ailleurs aucune formule applicable au calcul par logarithmes.

GÉOMÉTRIE.

Application de la doctrine des projections à la recherche des principales propriétés de l'ellipse ;

Par M. FERRIOT, Licencié ès sciences, professeur de mathématiques au lycée de Besançon.



1. J'APPELLE *Ellipse* la projection orthogonale d'un cercle sur un plan qui n'est pas parallèle au sien. J'appelle *Centre* de cette ellipse la projection du centre du cercle sur son plan. J'appelle enfin *Diamètre* de l'ellipse toute droite qui, tracée sur son plan, passe par son centre, et se termine de part et d'autre à la courbe. Tout diamètre de l'ellipse est donc la projection d'un diamètre du cercle.

Toutes les projections d'une même figure sur des plans parallèles entre eux étant égales, je supposerai, à l'avenir, pour fixer les idées, que le plan de l'ellipse passe par le centre du cercle, de manière que l'ellipse et le cercle auront le même centre. Je désignerai par a le rayon du cercle, par θ l'inclinaison de son plan à celui de l'ellipse, et je ferai, pour abréger, $a\text{Cos.}\theta=b$.

2. On voit par là que l'ellipse a avec le cercle un diamètre commun égal à $2a$, et que le diamètre de l'ellipse perpendiculaire à celui-là est $2a\text{Cos.}\theta=2b$. Il est de plus facile de démontrer que le premier de ces diamètres est le plus grand, et que le dernier est le plus petit de tous les diamètres de l'ellipse. Je les appellerai à l'avenir *le grand axe* et *le petit axe*.

3. Soient pris le grand axe pour axe des x et le petit axe pour axe des y, de manière que le centre de la courbe soit l'origine des coordonnées. x et y étant les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipse, les coordonnées

coordonnées du point correspondant du cercle seront x et $\frac{y}{\text{Cos.}t}$; on aura donc, par la propriété du cercle,

$$x^2+\frac{y^2}{\text{Cos.}^2t}=a^2\text{, ou } x^2\text{Cos.}^2t+y^2=a^2\text{Cos.}^2t\text{ ;}$$

ou, en multipliant par a^2,

$$a^2x^2\text{Cos.}^2t+a^2y^2=a^4\text{Cos.}^2t\text{ ;}$$

ou enfin

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\text{ ;}$$

équations connues de l'ellipse d'où on déduira que les quarrés des ordonnées, soit au grand axe, soit au petit axe, sont aux produits des abscisses correspondantes dans un rapport constant qui est celui des quarrés de ces deux axes.

4. Soient menées dans l'ellipse, sous une inclinaison quelconque, tant de cordes parallèles qu'on voudra ; les cordes du cercle dont elles seront les projections seront aussi parallèles ; ces dernières auront donc leurs milieux sur un même diamètre qui sera perpendiculaire à leur direction commune, et les tangentes aux extrémités de ce diamètre seront parallèles à ces cordes.

Les projections, tant du diamètre que des tangentes, seront un diamètre et des tangentes à l'ellipse ; ce diamètre de l'ellipse passera donc par les milieux des cordes parallèles, et les tangentes à ses extrémités seront parallèles à ces cordes.

Ainsi, *Dans l'ellipse, des cordes parallèles ont toujours leurs milieux sur un même diamètre, et les tangentes aux extrémités de ce diamètre sont parallèles à ces cordes.* De cette propriété résulte le moyen de déterminer le centre d'une ellipse donnée.

De même qu'une suite de cordes parallèles ont toujours leurs milieux sur un même diamètre de l'ellipse, réciproquement tout diamètre de l'ellipse coupe en deux parties égales un système de cordes parallèles. En effet ce diamètre étant la projection d'un diamètre

du cercle, et ce dernier coupant en deux parties égales toutes les cordes de ce cercle qui lui sont perpendiculaires, sa projection coupera aussi en deux parties égales les projections de ces cordes.

5. Parmi toutes les cordes qu'un même diamètre de l'ellipse partage en deux parties égales, il en est une qui, passant par le centre, est elle-même un diamètre. Les diamètres du cercle dont ces deux-là sont les projections étant perpendiculaires entre eux, les tangentes aux extrémités de chacun d'eux sont parallèles à l'autre; il en est donc de même des projections de ces tangentes à l'égard des projections des diamètres. Ainsi, *Dans l'ellipse, un diamètre étant mené arbitrairement, on en peut toujours mener un second de manière que les tangentes aux extrémités de chacun d'eux soient parallèles à l'autre;* Alors aussi chacun de ces diamètres partagera en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre.

Deux diamètres ainsi disposés sont ce que nous appellerons à l'avenir des *Diamètres conjugués* de l'ellipse. Ces diamètres conjugués sont donc les projections de deux diamètres rectangulaires dans le cercle.

6. Il est aisé de voir, d'après cela, que, dans l'ellipse, il ne peut y avoir qu'un seul système de diamètres conjugués rectangulaires, et que ces diamètres sont les deux axes de l'ellipse.

7. Pour que deux diamètres conjugués de l'ellipse soient égaux entre eux, il faut que les deux diamètres rectangulaires du cercle dont ils sont les projections soient également inclinés au plan de cette ellipse; ils doivent donc aussi être également inclinés à la commune section des plans des deux courbes. De là ils est aisé de conclure que les deux diamètres du cercle dont les projections sont des diamètres conjugués égaux de l'ellipse, doivent être dirigés suivant les diagonales du quarré circonscrit, dont deux côtés opposés sont parallèles et les deux autres perpendiculaires au grand axe de l'ellipse. De là résulte la proposition suivante :

Dans l'ellipse, les diamètres conjugués égaux sont dirigés suivant

les diagonales du rectangle circonscrit dont les côtés sont parallèles aux deux axes.

8. Soit circonscrit à l'ellipse un parallélogramme dont les côtés soient parallèles à deux diamètres conjugués; ce parallélogramme sera (5) la projection d'un quarré circonscrit au cercle. L'aire de ce quarré étant $4a^2$, celle du parallélogramme sera $4a^2\text{Cos.}\theta=4ab=2a.2b.$

Ainsi, *Tous les parallélogrammes circonscrits à l'ellipse, de manière que leurs côtés soient parallèles à deux diamètres conjugués, sont équivalens entre eux et au rectangle construit sur ses deux axes.* (*)

9. Soit $2a'$ un diamètre quelconque de l'ellipse, projection d'un diamètre du cercle faisant un angle ι avec le diamètre de ce cercle perpendiculaire au grand axe; soit x l'abscisse commune au cercle et à l'ellipse répondant à l'extrémité du diamètre $2a'$, et soient enfin y l'ordonnée de l'ellipse et y' l'ordonnée du cercle répondant à cette même extrémité, on aura

$$x=a\text{Sin.}\iota\,,\quad y'=a\text{Cos.}\iota\,,\quad y=y'\text{Cos.}\theta\,,$$

donc

$$a'^2=x^2+y^2=a^2\text{Sin.}^2\iota+y'^2\text{Cos.}^2\theta=a^2\text{Sin.}^2\iota+a^2\text{Cos.}^2\iota.\text{Cos.}^2\theta\;;$$

c'est-à-dire,

$$a'^2=a^2(\text{Sin.}^2\iota+\text{Cos.}^2\iota\text{Cos.}^2\theta).$$

Si, ayant ensuite mené dans le cercle un diamètre perpendiculaire au premier, on désigne par $2b'$ sa projection sur l'ellipse, laquelle sera le conjugué du diamètre $2a'$, on trouvera, par des considérations semblables,

(*) Il faut bien se garder de dire, comme on le trouve dans quelques traités élémentaires, que *tous les parallélogrammes circonscrits à une même ellipse sont équivalens.* Loin que cette proposition soit vraie, on peut toujours se proposer de circonscrire à une ellipse donnée un parallélogramme dont l'aire et les angles soient donnés.

$$b'^2=a^2(\text{Cos.}^2\iota+\text{Sin.}^2\iota\,\text{Cos.}^2\theta)\ ;$$

donc

$$a'^2+b'^2=a^2(1+\text{Cos.}^2\theta)=a^2+b^2\ ;$$

ou

$$4a'^2+4b'^2=4a^2+4b^2\ ;$$

c'est-à-dire :

Dans l'ellipse, la somme des quarrés de deux diamètres conjugués quelconques est une quantité constante et égale à la somme des quarrés des deux axes.

10. Désignons par α et β les angles que font les diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$ avec les diamètres du cercle dont ils sont les projections. Soient x', y' les coordonnées d'un point de l'ellipse rapporté à ces deux diamètres, et x, y les coordonnées correspondantes du cercle, on aura

$$x=\frac{x'}{\text{Cos.}\alpha},\qquad y=\frac{y'}{\text{Cos.}\beta}\ ;$$

mais on a

$$x^2+y^2=a^2\ :$$

substituant donc, il viendra

$$x'^2\text{Cos.}^2\beta+y'^2\text{Cos.}^2\alpha=a^2\text{Cos.}^2\alpha\text{Cos.}^2\beta\ ;$$

mais on a aussi

$$a'=a\text{Cos.}\alpha \qquad\qquad b'=a\text{Cos.}\beta\ ;$$

substituant donc, il viendra

$$b'^2x'^2+a'^2y'^2=a'^2b'^2.$$

Ainsi, *L'équation de l'ellipse rapportée à deux diamètres conjugués quelconques, est de même forme que l'équation aux axes.*

11. On sait que l'aire de la projection de toute figure plane sur un plan incliné au sien, est le produit de l'aire de cette figure par le cosinus de l'inclinaison des deux plans. En remarquant donc que l'aire du cercle est πa^2, et désignant par E l'aire de l'ellipse, on aura

$$E=\pi a^2\text{Cos.}\theta=\pi ab=\pi(\sqrt{ab})^2$$

c'est-à-dire :

L'aire de l'ellipse est égale à celle d'un cercle dont le diamètre serait moyen proportionnel entre ses deux axes.

12. On appelle *cordes supplémentaires* d'une ellipse, deux cordes qui partant d'un même point se terminent aux deux extrémités d'un même axe ou d'un même diamètre. Il est aisé de voir que deux pareilles cordes sont les projections de deux cordes supplémentaires du cercle, lesquelles étant essentiellement perpendiculaires entre elles sont conséquemment parallèles à deux diamètres rectangulaires dont les projections sont des diamètres conjugués de l'ellipse.

Ainsi, *Dans l'ellipse, deux cordes supplémentaires sont toujours parallèles à deux diamètres conjugués.*

De ce principe résultent 1.° le moyen de mener une tangente à l'ellipse par un point pris sur la courbe ; 2.° le moyen de déterminer deux diamètres conjugués qui fassent entre eux un angle donné.

13. Soient p, q les angles formés respectivement d'un même côté, avec l'axe des x, par les deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$; et soient p', q' les angles formés avec le même axe par les deux diamètres rectangulaires du cercle dont ceux-là sont les projections : on aura, comme l'on sait

$$1+\text{Tang.}p'\text{Tang.}q'=0\ ;$$

mais on a aussi

$$\text{Sin.}p=\text{Sin.}p'\text{Cos.}\theta\ ,\qquad \text{Sin.}q=\text{Sin.}q'\text{Cos.}\theta\ ,$$
$$\text{Cos.}p=\text{Cos.}p'\ ;\qquad \text{Cos.}q=\text{Cos.}q'\ ;$$

d'où

$$\text{Tang.}p=\text{Tang.}p'\text{Cos.}\theta\ ,\qquad \text{Tang.}q=\text{Tang.}q'\text{Cos.}\theta\ ,$$

ce qui donne

$$\text{Tang.}p'\text{Tang.}q'=\frac{\text{Tang.}p\text{Tang.}q}{\text{Cos.}^2\theta}=\frac{a^2}{b^2}\text{Tang.}p\text{Tang.}q\ ;$$

il viendra donc en substituant,

$$b^2+a^2\text{Tang.}p\text{Tang.}q=0\ ;$$

relation connue et dont la combinaison avec les théorèmes énoncés (8) et (9) fournit la solution de tous les problèmes relatifs au rapport de grandeur et de situation des diamètres conjugués et des axes.

14. Par le petit axe de l'ellipse soit conduit un plan faisant avec le sien un angle dont le cosinus soit $\frac{b}{a}$, et soit projetée l'ellipse orthogonalement sur ce plan ; soient x, y les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipse, et x', y' celles du point correspondant de sa projection, on aura

$$x=\frac{a}{b}x', \quad y=y';$$

mais, on a d'ailleurs

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2;$$

substituant donc, il viendra, en divisant par a^2

$$x'^2+y'^2=b^2;$$

ainsi la projection de l'ellipse est un cercle dont le rayon est b.

15. Par les deux extrémités du grand axe de l'ellipse et par l'une des extrémités du petit, soit fait passer un arc de cercle ; ces trois points seront les seuls points communs aux deux courbes, puisqu'elles ne peuvent se couper en plus de quatre points, et que, si elles avaient quatre points communs, à cause de la symétrie de la figure, elles en auraient au moins cinq. Il est en outre aisé de voir que le centre du cercle étant sur le petit axe de l'ellipse au-delà du centre de cette courbe, les tangentes menées à ce cercle par les extrémités du grand axe couperont l'ellipse, puisqu'elles formeront des angles aigus avec ce grand axe.

Ainsi, *L'arc de cercle qui passe par les deux extrémités du grand axe et par l'une des extrémités du petit est intérieur à l'ellipse.*

On démontrera, par de semblables considérations, que *L'arc de cercle qui passe par les deux extrémités du petit axe et par l'une des extrémités du grand est extérieur à l'ellipse.*

De là il est facile de conclure, 1.° *Que de tous les angles inscrits qui s'appuyent sur le grand axe, le plus grand est celui qui a son sommet à l'extrémité du petit*; 2.° *Que de tous les angles inscrits qui s'appuyent sur le petit axe, le plus petit est celui qui a son sommet à l'extrémité du grand.*

De l'une et de l'autre de ces propositions et de ce qui a été dit, (7), résulte que *l'angle obtus formé par les diamètres conjugués égaux de l'ellipse est le plus grand que puissent former deux diamètres conjugués.*

16. Soient une suite de cercles égaux situés dans des plans différens, se coupant tous suivant un diamètre commun. Si on les projette sur un plan quelconque passant par ce diamètre, leurs projections seront une suite d'ellipses ayant le même grand axe. Soit pris cet axe pour axe des abcisses; si, pour une abcisse quelconque, on mène les ordonnées correspondantes de tous les cercles, les projections de ces ordonnées se confondront en une seule droite qui sera une ordonnée commune à toutes les ellipses. Que par les extrémités des ordonnées aux différens cercles on mène des tangentes à ces cercles, ces tangentes iront toutes se terminer au même point du prolongement de leur diamètre commun, c'est-à-dire, du grand axe des ellipses; et les projections de ces tangentes, lesquelles seront des tangentes aux ellipses, concourront aussi en ce point.

Ainsi, *Si une suite d'ellipses ont le même grand axe, les tangentes menées à ces ellipses par les points où elles sont coupées par une perpendiculaire quelconque à ce grand axe, concourront toutes en un même point de son prolongement.* On démontrerait facilement, à l'aide de ce qui a été observé (14), que la même propriété a lieu par rapport à une suite d'ellipses qui auraient toutes le même petit axe.

Ce qui précède suffit pour montrer combien la doctrine des projections est propre à simplifier la démonstration d'un grand nombre de propositions de géométrie. Nous terminerons par observer qu'on se procurerait plus de ressources encore en recourant aux principes

de la perspective, comme quelques géomètres en ont déjà fait l'essai. En particulier, il serait très-facile de déduire de ces principes les méthodes connues pour mener, *avec la règle*, une tangente à une section conique, soit par un point extérieur, soit par un point pris sur la courbe (*).

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème d'hydrodynamique proposé à la page 164 *de ce volume ;*

Par M. GERGONNE. (**)



1. On a deux vases V et V′, en forme de prismes ou de cylindres droits. Leurs bases sont horizontales et ont des aires respectivement égales à b et b'. Ces vases étant remplis d'eau jusqu'à des hauteurs h et h', on pratique à la fois à l'un et à l'autre et latéralement une fente verticale d'une largeur uniforme par laquelle l'eau s'écoule. L'eau du vase V est reçue dans le vase V′ et celle de celui-ci est évacuée au dehors. On suppose d'ailleurs que la quantité d'eau qui s'écoule des deux vases est indépendante de la pression du liquide supérieur, que conséquemment, pour chaque vase, elle est constante dans toute l'étendue de la fente qui répond au liquide. On suppose enfin que le volume d'eau écoulé pendant l'unité de temps, par une unité de longueur de la fente, est v pour le vase V et v' pour le vase V′.

Cela posé, on propose de déterminer, 1.° quelle sera la hauteur du liquide dans les deux vases à une époque donnée quelconque;

(*) Voy. la note de la page 338, du I.er volume des *Annales*.

(**) Ce problème a été proposé par M. Brèt, professeur à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble.

2.°

2.° à quelle époque l'eau aura atteint son maximum de hauteur dans le vase V'; 3.° enfin quelle sera alors la hauteur du liquide dans ce vase.

2. Soit z la hauteur du liquide dans le vase V à l'époque t; à l'époque $t+i$ cette hauteur sera

$$z+\frac{dz}{dt}\frac{i}{1}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{i^2}{1.2}+\ldots\ldots; \qquad (A)$$

elle aura donc diminué de la quantité

$$-\frac{dz}{dt}\frac{i}{1}-\frac{d^2z}{dt^2}\frac{i^2}{1.2}-\ldots\ldots;$$

d'où il suit que le volume du liquide évacué durant l'intervalle de temps i sera

$$b\left(-\frac{dz}{dt}\frac{i}{1}-\frac{d^2z}{dt^2}\frac{i^2}{1.2}-\ldots\ldots\right),$$

c'est-à-dire;

$$-b\frac{dz}{dt}\frac{i}{1}-b\frac{d^2z}{dt^2}\frac{i^2}{1.2}-\ldots\ldots \qquad (B)$$

3. Présentement si, pendant l'intervalle de temps i, le liquide eût été constamment entretenu dans le vase V à la hauteur z, le volume d'eau évacué durant cet intervalle eût été

$$vz\frac{i}{1}; \qquad (C)$$

et si, au contraire, le liquide eût constamment été, pendant le même temps, à la hauteur où il n'est parvenu qu'à l'époque $t+i$, le volume de la partie évacuée durant le temps i n'eût été que

$$vi\left(z+\frac{dz}{dt}\frac{i}{1}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{i^2}{1.2}+\ldots\ldots\right),$$

c'est-à-dire,

$$vz\frac{i}{1}+2v\frac{dz}{dt}\frac{i^2}{1.2}+3v\frac{d^2z}{dt^2}\frac{i^3}{1.2.3}+\ldots\ldots. \qquad (D)$$

Or il est visible que l'on peut toujours supposer i assez petit, sans

être nul, pour que le volume d'eau réellement évacué soit compris entre ces deux-là ; c'est-à-dire, pour que la fonction (B) soit comprise entre les fonctions (C) et (D), et qu'alors il en sera de même pour toutes les valeurs de i inférieures à celle-là ; on doit donc avoir, rigoureusement en vertu d'un théorème connu (*),

$$-b.\frac{dz}{dt}=vz\ ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dz}{dt}=-\frac{v}{b}z\ .\quad (^{**})\qquad\qquad (E)$$

4. Si l'on fait $z=e^x$, d'où $\frac{dz}{dt}=e^x\frac{dx}{dt}$, il viendra, en substituant et divisant par e^x

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{v}{b}\ ,$$

d'où

$$x=T-\frac{v}{b}t\ ,$$

T étant une constante arbitraire. On aura donc

$$z=e^{T-\frac{v}{b}t}\ ;\qquad (F)$$

au bout du temps $t+i$; z sera donc devenu

$$e^{T-\frac{v}{b}(t+i)}=e^{T-\frac{v}{b}t}\times e^{-\frac{v}{b}i}=z.e^{-\frac{v}{b}i}\ ,$$

c'est-à-dire,

$$z-\frac{v}{b}z\frac{i}{1}+\frac{v^2}{b^2}z\frac{i^2}{1.2}-\dots\dots\qquad (G)$$

(*) Voyez le *Calcul des dérivations* d'Arbogast, note de la préface, page XIV. Voyez aussi le *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* de M. Lacroix, deuxième édition, tome 1.er, introduction, page 65.

(**) On parvient à ce résultat d'une manière moins rigoureuse, à la vérité, quant au langage, mais beaucoup plus courte, en remarquant que $vzdt$ et $-bdz$ ne sont que deux expressions différentes du volume de liquide évacué durant l'instant dt.

formule qui doit coïncider avec la formule (A), et qui montre que l'abaissement du liquide dans le temps i est

$$\frac{v}{b}z\frac{i}{1}-\frac{v^2}{b^2}z\frac{i^2}{1.2}+\ldots\ldots \qquad \text{(H)}$$

5. Si l'on veut compter les temps depuis l'époque où l'écoulement a commencé, on devra avoir à la fois $z=h$ et $t=0$, ce qui donnera

$$h=e^T\ ;$$

divisant l'équation (F) par celle-ci, il viendra, en chassant le dénominateur,

$$z=he^{-\frac{v}{b}t}$$

c'est là l'expression de la hauteur du liquide dans le vase V au bout du temps t: elle montre que cette hauteur, bien qu'elle décroisse continuellement, ne pourra jamais devenir tout à fait nulle.

6. Considérons actuellement ce qui se passe dans le vase V'; soit z' la hauteur du liquide dans ce vase à l'époque t; à l'époque $t+i$ elle sera

$$z'+\frac{dz'}{dt}\frac{i}{1}+\frac{d^2z'}{dt^2}\frac{i^2}{1.2}+\ldots\ldots ; \qquad \text{(I)}$$

et le volume de liquide introduit dans ce vase pendant le temps i sera (H)

$$b\left(\frac{v}{b}z\frac{i}{1}-\frac{v^2}{b^2}\frac{i^2}{1.2}+\ldots\ldots\right). \qquad \text{(K)}$$

Si ce volume eût été subitement introduit à l'époque t, il eût élevé le liquide d'une quantité

$$\frac{b}{b'}\left(\frac{v}{b}z\frac{i}{1}-\frac{v^2}{b^2}z\frac{i^2}{1.2}+\ldots\ldots\ldots\right),$$

c'est-à-dire,

$$\frac{v}{b'}z\frac{i}{1}-\frac{v^2}{bb'}z\frac{i^2}{1.2}+\ldots\ldots ; \qquad \text{(L)}$$

de manière que ce liquide se fût trouvé, à l'époque t, à une hauteur

$$z' + \frac{v}{b'} z \frac{i}{1} - \frac{v^2}{bb'} z \frac{i^2}{1.2} + \ldots\ldots;$$

sa hauteur à l'époque $t+i$ eût donc été dans cette hypothèse (G)

$$\left(z' + \frac{v}{b'} z \frac{i}{1} - \frac{v^2}{bb'} z \frac{i^2}{1.2} + \ldots\right) - \frac{v'}{b'}\left(z' + \frac{v}{b} z \frac{i}{1} - \ldots\right)\frac{i}{1}$$
$$+ \frac{v'^2}{b'^2}(z' + \ldots\ldots)\frac{i^2}{1.2} - \ldots$$

c'est-à-dire,

$$z' + \left(\frac{v}{b'} z - \frac{v'}{b'} z'\right)\frac{i}{1} + \left(\frac{v'^2}{b'^2} z' - \frac{v^2}{bb'} z - 2\frac{vv'}{bb'} z\right)\frac{i^2}{1.2} + \ldots \qquad (M)$$

7. Si, au contraire ce volume de liquide eût été subitement introduit à l'époque $t+i$; comme à l'époque t il se trouvait à la hauteur z', sa hauteur à l'époque $t+i$ se fût trouvée d'abord (G)

$$z' - \frac{v'}{b'} z' \frac{i}{1} + \frac{v'^2}{b'^2} z' \frac{i^2}{1.2} - \ldots;$$

à quoi ajoutant l'élévation (L) due au liquide subitement introduit, c'est-à-dire,

$$\frac{v}{b'} z \frac{i}{1} - \frac{v^2}{bb'} z \frac{i^2}{1.2} + \ldots\ldots;$$

on aura pour hauteur totale, à l'époque $t+i$,

$$z' + \left(\frac{v}{b'} z - \frac{v'}{b'} z'\right)\frac{i}{1} + \left(\frac{v'^2}{b'^2} z' - \frac{v^2}{bb'} z\right)\frac{i^2}{1.2} + \ldots \qquad (N)$$

8. Présentement il est facile de voir que i peut toujours être supposé assez petit, sans être nul, pour que la hauteur effective du liquide dans le vase V', à l'époque $t+i$ soit moyenne entre celles qui résultent de ces deux hypothèses, c'est-à-dire, pour que la fonction (I) soit comprise entre les fonctions (M) et (N); d'où l'on doit conclure, comme ci-dessus,

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{v}{b'} z - \frac{v'}{b'} z',$$

ou

$$b'.\frac{dz'}{dt}=vz-v'z' \text{ (*)}. \qquad \text{(O)}$$

9. Pour que la hauteur z' du liquide dans le vase V' soit un *maximum*, il faut qu'on ait $\frac{dz'}{dt}=0$; ce qui donne

$$vz-v'z'=0 \qquad \text{d'où} \qquad vz=v'z' ;$$

or vz et $v'z'$ sont les dépenses respectives des vases V et V' dans le même temps ; ainsi le liquide sera à sa plus grande hauteur dans le vase V', lorsque ce vase perdra précisément autant d'eau dans un instant que le vase V lui en fournira, ce qui était d'ailleurs facile à prévoir.

10. Si entre les équations (E) et (O) on élimine dt, on obtiendra

$$b'vz\frac{dz'}{dz}=b(v'z'-vz) ;$$

posant alors $z'=zy$ d'où $\frac{dz'}{dz}=z\frac{dy}{dz}+y$, il viendra, en substituant et divisant par z,

$$b'v\left(z\frac{dy}{dz}+y\right)=b(v'y-v) ,$$

ou

$$\frac{dz}{z}=\frac{b'vdy}{(bv'-b'v)y-bv}=\frac{b'v}{bv'-b'v}\cdot\frac{(bv'-b'v)dy}{(bv'-b'v)y-bv} ;$$

d'où

$$\text{Log.}z+\text{Log.}C=\frac{b'v}{bv'-b'v}\text{Log.}\{(bv'-b'v)y-bv\} ;$$

ou en remettant pour y la valeur $\frac{z'}{z}$ et réduisant

$$\frac{bv'}{bv'-b'v}\text{Log.}z+\text{Log.}C=\frac{b'v}{bv'-b'v}\text{Log.}\{(bv'-b'v)z'-bvz\} .$$

(*) On parvient sur-le-champ à ce résultat, en remarquant que l'accroissement du volume du liquide dans le vase V', durant l'instant dt, peut être également exprimé par $b'dz'$ et par $(vz-v'z')dt$.

11. En considérant que les valeurs h et h' de z et z' doivent se correspondre, on aura pareillement

$$\frac{bv'}{bv'-b'v}\text{Log.}h+\text{Log.C}=\frac{b'v}{bv'-b'v}\text{Log.}\{(bv'-b'v)h'-bvh\},$$

équation qui, retranchée de la précédente, donne

$$\frac{bv'}{bv'-b'v}\text{Log.}\frac{z}{h}=\frac{b'v}{bv'-b'v}\text{Log.}\frac{(bv'-b'v)z'-bvz}{(bv'-b'v)h'-bvh};$$

ou simplement

$$bv'\text{Log.}\frac{z}{h}=b'v\text{Log.}\frac{(bv'-b'v)z'-bvz}{(bv'-b'v)h'-bvh};$$

ce qui revient à

$$\left(\frac{z}{h}\right)^{bv'}=\left\{\frac{(bv'-b'v)z'-bvz}{(bv'-b'v)h'-bvh}\right\}^{b'v}, \qquad \text{(P)}$$

ou encore

$$\{(bv'-b'v)h'-bvh\}\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{bv'}{b'v}}=(bv'-b'v)z'-bvz,$$

et donne

$$z'=\frac{\{(bv'-b'v)h'-bvh\}\left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{bv'}{b'v}}+bvz}{bv'-b'v},$$

formule qui donnera z' lorsque z sera connu.

12. Nous avons trouvé (5)

$$z=he^{-\frac{v}{b}t}, \text{ d'où } \frac{z}{h}=e^{-\frac{v}{b}t} \text{ et } \left(\frac{z}{h}\right)^{\frac{bv'}{b'v}}=e^{-\frac{v'}{b'}t};$$

substituant donc, il viendra

$$z'=h'e^{-\frac{v'}{b'}t}+bvh.\frac{e^{-\frac{v}{b}t}-e^{-\frac{v'}{b'}t}}{bv'-b'v} \text{ (*)}. \qquad \text{(Q)}$$

(*) Si dans l'équation (O), on substitue pour z sa valeur en t, elle deviendra

$$b'\frac{dz'}{dt}=vhe^{-\frac{v}{b}t}-v'z';$$

C'est là la hauteur du liquide dans le vase V′ à l'époque t.

13. Si dans l'équation (P) on met pour z' sa valeur $\frac{vz}{v'}$ qui convient au maximum, elle deviendra

$$z^{bv'-b'v}=h^{bv'}\cdot\left\{\frac{b'v^2}{v'[bvh-(bv'-b'v)h']}\right\}^{b'v};$$

en remettant pour z sa valeur en t, on aura

$$e^{\left(\frac{b'}{b}-\frac{v'}{b}\right)t}=h^{bv}\left\{\frac{v}{v'}\cdot\frac{b'v}{bvh-(bv'-b'v)h'}\right\}^{b'v};$$

ou en passant des nombres aux logarithmes

$$\left(\frac{b'}{b}-\frac{v'}{v}\right)t=\text{Log.}h^{b'v}\left\{\frac{v}{v'}\cdot\frac{b'v}{bvh-(bv'-b'v)h'}\right\}^{b'v};$$

équation qui donnera l'époque t où le liquide du vase V′ aura atteint son *maximum* d'élévation.

14. Ces dernières formules se simplifient lorsque le vase V′ ne contient d'autre liquide que celui qu'il reçoit du vase V. On a alors $h'=0$, ce qui donne pour la hauteur de l'eau dans le vase V′ à l'époque t,

$$z'=\frac{e^{-\frac{v}{b}t}-e^{-\frac{v'}{b'}t}}{\frac{v'}{b}-\frac{b'}{b}}h;$$

et pour l'époque du *maximum* de hauteur du liquide dans ce vase,

$$t=\frac{\text{Log.}\left(\frac{v}{b}\right)-\text{Log.}\left(\frac{v'}{b'}\right)}{\frac{v}{b}-\frac{v'}{b'}};$$

il est remarquable qu'alors l'époque du *maximum* est indépendante du volume d'eau contenu dans le vase V.

15. Si de plus on suppose les vases V et V′ absolument égaux et percés de la même manière, on trouvera 1.° pour la hauteur du

---

cette équation, qui ne paraît être facilement intégrable par aucun moyen connu, a donc pour intégrale l'équation (Q).

liquide dans le vase V′ à l'époque t

$$z'=h.\frac{v}{b}\,te^{-\frac{v}{b}t};$$

2.° pour la plus grande hauteur du liquide dans ce vase

$$z'=\frac{h}{e}\;;$$

3.° enfin pour l'époque où le *maximum* d'élévation du liquide aura lieu dans le vase V′

$$t=\frac{b}{v}\,.$$

On traiterait de la même manière le cas où l'un des vases ou tous les deux seraient construits en forme de cônes ou de pyramides, tronqués ou non tronqués, et celui où l'on aurait égard à la pression du liquide supérieur ; mais il est douteux qu'alors on parvînt à des formules intégrables.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. ÉTANT donnés, dans un quadrilatère complet, le triangle formé par deux côtés et la diagonale qui joint leurs extrémités, et connaissant, en outre, la position, par rapport à ce triangle, du point de concours des deux autres diagonales ; construire le quadrilatère, *en n'employant que la règle seulement* ?

II. A un même triangle donné quelconque, on peut inscrire une infinité de systèmes de trois cercles égaux, tels que chacun de ces cercles touche les deux autres et *un côté* du triangle.

On propose de construire le plus petit de ces systèmes ? (*)

(*) On pourrait généraliser le problème, en demandant que les rayons des trois cercles, au lieu d'être égaux, soient entre eux dans un rapport donné. On pourrait aussi le renverser, en proposant de circonscrire, au système de trois cercles qui se touchent deux à deux, un triangle donné d'espèce, qui soit le plus grand possible.

GÉOMÉTRIE.

Eclaircissemens sur le troisième et sur le sixième cas de la trigonométrie sphérique;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.



J'appelle *troisième cas* de la trigonométrie sphérique celui dans lequel on donne deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux. J'appelle *sixième cas* celui dans lequel on donne deux angles et le côté opposé à l'un d'eux.

Par les propriétés des triangles polaires, l'un de ces cas est ramené à l'autre; en particulier, le sixième est ramené au troisième. Quoiqu'on puisse traiter chacun d'eux séparément, et indépendamment des triangles polaires, j'examinerai particulièrement ce qui concerne le troisième cas; il sera facile ensuite d'appliquer au sixième ce qui aura été dit sur le troisième.

Lorsque le troisième cas est possible et déterminé, on a coutume de dire qu'il admet tantôt deux solutions, tantôt une solution et même aucune, en ayant égard à la grandeur du côté donné opposé à l'angle donné, relativement au côté qui est jambe de cet angle. Je pense, au contraire, qu'on doit regarder ce cas (lorsqu'il est possible et déterminé) comme ayant toujours deux solutions.

Pour éclaircir mon avis à cet égard, je vais discuter le cas correspondant de la trigonométrie rectiligne, dans lequel on connaît deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.

Pour construire le triangle proposé, sous les conditions données, on fait l'angle A (fig. 1, 2) de la grandeur donnée; sur une de

ses jambes, on prend AB de la grandeur donnée; de son extrémité B on abaisse sur l'autre jambe la perpendiculaire BD. Pour que le triangle soit possible, le côté donné opposé à l'angle A ne doit pas être plus petit que la perpendiculaire BD. Lorsque ce côté est égal à sa limite en petitesse, le triangle ABD, rectangle en D, est le seul qui satisfasse aux conditions.

La condition de possibilité étant remplie; du point B comme centre, avec un rayon égal au côté donné opposé à l'angle A, on décrit un arc de cercle qui coupe la jambe AD en deux points C et C′, situés de part et d'autre du point D, et à une même distance de lui, auxquels répondent deux triangles BAC, BAC′.

Partant, en tant que la construction du triangle proposé dépend de l'intersection (supposée possible) d'un cercle et d'une droite, le problème a toujours deux solutions.

Si le côté BC (supposé plus grand que BD) est plus petit que le côté AB, jambe de l'angle donné; les deux points C et C′ sont situés d'un même côté du point A (fig. 1), relativement à la jambe AB, et l'angle donné A est déterminé à être aigu. Les deux triangles ABC, ABC′ ont entre eux les rapports suivans: les angles C et C′ sont l'un supplément de l'autre, les côtés AC et AC′ sont l'un la somme et l'autre la différence de DA et DC ou DC′, et les angles ABC et ABC′ sont aussi l'un la somme et l'autre la différence des angles DBA et DBC ou DBC′.

Que le côté BC soit égal au côté AB; le point D′ tombe en A, le triangle ABC′ dégénère dans la ligne AB, et le côté AC′ devient zéro, en conservant le type de son inclinaison à AB.

Que le côté BC (fig. 2) soit plus grand que le côté AB; les points C et C′ sont situés de différents côtés du point A, relativement au côté AB. Dans le triangle ABC′, l'angle A est déterminé à être obtus. Dans les triangles ABC, ABC′, les angles C et C′ sont égaux entre eux, le côté AC′ est l'excès de DC sur DA, et l'angle ABC′ est l'excès de DBC sur DBA. Quant aux angles en A, les deux

triangles diffèrent entre eux en ce que ces deux angles sont l'un le supplément de l'autre.

C'est cette différence qui fait regarder ce dernier cas comme n'ayant qu'une solution, en tant qu'on regarde l'angle A comme étant déterminément aigu ou comme étant déterminément obtus.

Lorsque deux droites (non perpendiculaires l'une à l'autre) se rencontrent, chacun des angles, l'un aigu et l'autre obtus, qu'elles font entre elles, peut être pris pour leur inclinaison, jusqu'à ce qu'il y ait quelque raison qui lève le doute qu'on doit avoir à cet égard. Or, la grandeur du côté BC, relativement au côté AB, lève ce doute ; de manière que, lorsque le côté BC est plus petit que le côté BA, il détermine l'angle A à être aigu, dans chacun des triangles qu'on obtient ; et lorsque, au contraire, BC est plus grand que BA, il détermine l'angle A à être aigu dans l'un des ces triangles, et obtus dans l'autre. Donc chacun de ces triangles doit être regardé comme remplissant les conditions de la question, tantôt pour l'angle aigu A dans l'un et dans l'autre (fig. 1), et tantôt pour l'angle aigu A dans l'un et l'angle obtus A dans l'autre (fig. 2) (*).

L'algèbre vient à l'appui de ces considérations géométriques.

En effet, en regardant BC et BD comme connus, on a $DC^2=BC^2-BD^2$, et partant $DC=\pm\sqrt{BC^2-BD^2}$; partant la ligne DC a toujours deux valeurs, les mêmes quant à la grandeur, et différentes par le signe, soit que DC soit plus petite ou plus grande que AD, et partant, soit que l'angle A soit aigu ou obtus. L'algèbre et la géométrie sont donc d'accord pour faire regarder chacune des deux solutions qu'on obtient comme devant être admise. Le problème pro-

(*) On peut concilier l'opinion de M. Lhuilier avec celle qu'il combat, en disant qu'à la vérité le problème a toujours deux solutions, mais qu'il arrive ici ce qu'on rencontre dans la plupart des problèmes du second degré où, par des circonstances particulières à la question qu'on traite, une des deux solutions doit être rejetée ; il paraît même que ce n'est que dans ce sens que les géomètres disent que le problème dont il s'agit ici, peut souvent n'admettre qu'une solution unique.

(*Note des éditeurs.*)

posé, lorsqu'il est possible et hors de la limite, a donc toujours deux solutions.

Qu'on cherche immédiatement le côté AC, sans considérer le segment AD, on l'obtiendra par l'équation

$$BC^2 = AC^2 - 2AB \times AC\,Cos.A + AB^2,$$

laquelle donne

$$AC = AB\,Cos.A \pm \sqrt{BC^2 - AB^2.Sin.^2A}.$$

Partant, lorsqu'on a $BC > AB\,Sin.A$, AC a deux valeurs.

En regardant A comme aigu, l'une de ces valeurs est toujours positive; l'autre est aussi positive, si l'on a

$$AB\,Cos.A > \sqrt{BC^2 - AB^2Sin.^2A} \quad \text{ou} \quad AB > BC;$$

cette valeur est zéro, si $AB = BC$; et elle est négative, si l'on a $AB < BC$.

Ainsi encore, l'algèbre fait regarder l'une et l'autre des déterminations du point C, dépendantes de la grandeur de AC, comme réelles, et comme pouvant différer entre elles par la direction de la droite AC.

Avant de passer à mon but principal, relatif à la trigonométrie sphérique, je crois devoir faire précéder la proposition suivante.

LEMME. Soit un point donné de position, sur la surface d'un hemisphère, hors de sa base et différent de son pôle. Par ce point, soient menés des arcs de grands cercles à la circonférence de la base de l'hémisphère. Le plus grand de ces arcs est celui qui passe par le pôle; le plus petit est le supplément de celui-là. Les autres sont d'autant plus grands ou plus petits qu'ils font des angles plus grands avec le plus petit ou le plus grand de ces arcs; de manière qu'ils passent par toutes les grandeurs intermédiaires entre leur plus petite et leur plus grande valeur.

Soit P (fig. 3) le pôle d'un hémisphère; soit B un point hors de sa base et différent du pôle; par B soit mené à un point C de la circonférence de la base de l'hémisphère l'arc de grand cercle BC; soit aussi mené par B le demi-grand cercle DBD′ dont la partie BD′ soit celle qui passe par le pôle P, en sorte que ce ne soit que le prolongement

de BD qui passe par ce pôle ; j'affirme que l'on a $BD < BC$ et $BD' > BC$.

Soit BQ une droite perpendiculaire au plan de la base de l'hémisphère ; et soient menées les droites QC, QD, QD'.

On a, quel que soit le point C,

$$BC^2 = BQ^2 + QC^2.$$

Dans toutes les équations semblables, BQ est constant ; donc le carré de la corde BC croît avec le carré de QC ; mais QD est la plus petite et QD' la plus grande des droites QC ; donc aussi la corde BD est la plus petite, et la corde BD' la plus grande des cordes BC ; mais les arcs BD, BD', BC sont plus petits que la demi-circonférence ; donc aussi l'arc BD est le plus petit et l'arc BD' le plus grand de tous les arcs BC. De plus, comme le carré de QC passe par tous les degrés de grandeur intermédiaires entre le carré de QD et le carré de QD', le carré de la corde BC passe aussi par tous les degrés de grandeur intermédiaires entre les carrés de BD et BD', et partant aussi, les cordes BC et les arcs BC passent par tous les degrés de grandeur intermédiaires entre les cordes et les arcs BD et BD'.

En particulier, les arcs qui font avec l'arc BD ou BD' des angles égaux de part et d'autre de ces arcs, sont égaux entre eux.

Cela posé, soit ABC (fig. 4) un triangle sphérique dont on connaît les côtés AB et BC et l'un des angles en A opposé au côté BC.

I. Que les côtés AB, BC, soient tous deux des quadrans, le point B est le pôle de l'arc AC ; les angles A et C sont déterminés à être l'un et l'autre des angles droits ; le côté AC et l'angle ABC sont quelconques ; et le triangle ABC est indéterminé.

Réciproquement, que l'angle A soit droit et que sa jambe donnée BA soit un quadrans ; le côté BC est déterminé à être aussi un quadrans ; l'angle C est déterminé à être droit ; et le triangle est indéterminé.

II. Que l'angle A soit droit, et que le côté AB soit différent d'un quadrans; que AB prolongé rencontre en A′ la circonférence de la base AC.

Le côté BC est déterminé à être plus $\left\{\begin{matrix}\text{grand}\\ \text{petit}\end{matrix}\right\}$ que le plus $\left\{\begin{matrix}\text{petit}\\ \text{grand}\end{matrix}\right\}$ des arcs BA et BA′.

Cette condition de la possibilité étant remplie, il y a deux points C et C′ situés de part et d'autre du point A et à une même distance de lui (*), auxquels répondent des arcs égaux BC, BC′; et on obtient deux triangles BAC, BAC′ qui ne diffèrent l'un de l'autre que par leur position relativement à AB.

III. Que l'angle A soit différent d'un droit, et que l'arc AB soit un quadrans. Par B soit mené l'arc de grand cercle perpendiculaire à AC rencontrant en D et D′ la circonférence dont AC fait partie.

L'arc BC est déterminé à être plus $\left\{\begin{matrix}\text{grand}\\ \text{petit}\end{matrix}\right\}$ que le plus $\left\{\begin{matrix}\text{petit}\\ \text{grand}\end{matrix}\right\}$ des arcs BD et BD′, dont l'un est plus petit et l'autre plus grand qu'un quadrans.

Que ces conditions de la possibilité soient remplies.

1.° Que l'arc BC soit plus petit qu'un quadrans, les deux points C et C′ auxquels répondent les arcs égaux BC et BC′, également éloignés du point D, de part et d'autre de ce point, sont situés dans celui des fuseaux ABA′D auquel répond l'angle aigu en A; partant, dans chacun des deux triangles ABC et ABC′, l'angle A est aigu, et les triangles ABC et ABC′ ont entre eux les relations suivantes : les deux angles C et C′ sont, l'un aigu et l'autre obtus, supplémens l'un de l'autre; les côtés AC et AC′ sont, l'un la somme et l'autre la différence de AD et DC ou DC′; et les angles ABC

(*) On n'a point cru nécessaire de faire une figure pour ce cas particulier qui est de lui-même évident.

(*Note des éditeurs.*)

et ABC′ sont, l'un la somme et l'autre la différence des angles DBA et DBC ou DBC′.

2.° Que l'arc BC soit un quadrans, l'un des triangles ABC devient le fuseau ABA′D, et l'autre de ces triangles devient le côté AB. Pour le premier de ces deux triangles, l'arc AC=AA′, pour le second, l'arc AC devient zéro, et l'angle ABC devient aussi zéro.

3.° Que l'arc BC soit plus grand qu'un quadrans, les deux points C et C′ sont l'un et l'autre dans celui des deux fuseaux sphériques dont l'angle en A est obtus; l'arc BD, qui appartient à ce fuseau, est le plus grand des deux arcs BD et BD′; les angles C et C′ sont, l'un aigu et l'autre obtus, supplémens l'un de l'autre; les arcs AC et AC′ sont respectivement la somme et la différence des arcs DA et DC ou DC′; enfin les angles ABC et ABC′ sont, l'un la somme et l'autre la différence des angles DBA et DBC ou DBC′.

IV. Que l'angle A soit différent d'un droit, et que l'arc AB soit différent d'un quadrans.

L'arc BC ne doit pas être plus $\left\{\begin{matrix}\text{petit}\\ \text{grand}\end{matrix}\right\}$ que le plus $\left\{\begin{matrix}\text{petit}\\ \text{grand}\end{matrix}\right\}$ des arcs BD et BD′, perpendiculaires à AC, et supplémens l'un de l'autre à la demi-circonférence. Lorsque BC est égal au plus $\left\{\begin{matrix}\text{petit}\\ \text{grand}\end{matrix}\right\}$ de ces arcs, l'angle A est déterminé à être $\left\{\begin{matrix}\text{aigu}\\ \text{obtus}\end{matrix}\right\}$; le triangle proposé est unique, et dans le cas de la limite.

Que les conditions de la possibilité soient remplies.

1.° et 2.° Que l'arc BC soit donné plus $\left\{\begin{matrix}\text{petit}\\ \text{grand}\end{matrix}\right\}$ que le plus $\left\{\begin{matrix}\text{petit}\\ \text{grand}\end{matrix}\right\}$ des arcs BA et BA′, supplémens l'un de l'autre à la demi-circonférence, on obtient deux triangles ABC, ABC′ l'un et l'autre dans celui des deux fuseaux qui a l'angle A $\left\{\begin{matrix}\text{aigu}\\ \text{obtus}\end{matrix}\right\}$; et partant, dans chacun de ces triangles, l'angle A est déterminé à être $\left\{\begin{matrix}\text{aigu}\\ \text{obtus}\end{matrix}\right\}$; les angles en C et C′ sont l'un le supplément de l'autre; les côtés

AC et AC′ sont, l'un la somme et l'autre la différence des arcs DA et DC ou DC′ : enfin les angles ABC et ABC′ sont, l'un la somme et l'autre la différence des angles DBA et DBC ou DBC′.

3.° Que le côté BC soit donné égal au côté AB ; l'un des triangles ABC s'évanouit, parce qu'il se réduit au côté AB. Que le côté BC soit donné égal au supplément de AB, l'un des triangles devient le fuseau sphérique ABA′A.

4.° Enfin que l'arc BC soit donné à la fois plus $\left\{\begin{matrix}\text{petit}\\ \text{grand}\end{matrix}\right\}$ que le plus $\left\{\begin{matrix}\text{grand}\\ \text{petit}\end{matrix}\right\}$ des deux arcs AB, A′B ; les deux triangles BAC, BAC′ sont l'un dans celui des fuseaux ABA′D qui a l'angle aigu en A, et l'autre dans celui de ces fuseaux qui a l'angle obtus en A ; partant, dans l'un de ces triangles, tel que BAC′, l'angle en A est aigu, et dans l'autre de ces triangles, l'angle en A est obtus. Les angles BCA et BC′A sont égaux entre eux ; les côtés AC et AC′ sont, l'un la somme et l'autre la différence de DC ou DC′ à DA ; et les angles ABC et ABC′ sont aussi, l'un la somme et l'autre la différence de l'angle DBC ou DBC′ à l'angle DBA.

Récapitulation. BC a pour limite en $\left\{\begin{matrix}\text{grandeur}\\ \text{petitesse}\end{matrix}\right\}$ le plus $\left\{\begin{matrix}\text{grand}\\ \text{petit}\end{matrix}\right\}$ des arcs supplémens l'un de l'autre dont le sinus commun est *Sin*.AB *Sin*.A.

Que BC soit plus petit que le plus petit des arcs BA, BA′, supplémens l'un de l'autre à la demi-circonférence ; l'angle A est déterminé à être aigu.

Que BC soit plus grand que le plus grand des arcs BA et BA′, supplémens l'un de l'autre à la demi-circonférence ; l'angle A est déterminé à être obtus.

Que BC soit, à la fois plus $\left\{\begin{matrix}\text{grand}\\ \text{petit}\end{matrix}\right\}$ que le plus $\left\{\begin{matrix}\text{petit}\\ \text{grand}\end{matrix}\right\}$ des arcs BA et BA′, supplémens l'un de l'autre à la demi-circonférence ; dans l'un des triangles obtenus, l'angle A est déterminé à être aigu ; et dans l'autre de ces triangles, l'angle A est déterminé à être obtus.

Le problème : *Déterminer un triangle dont on connaît deux côtés et l'angle*

l'angle opposé à l'un d'eux ? (lorsqu'il est possible et déterminé) a toujours deux solutions, en tant qu'on prend le mot *inclinaison* dans son acception générale, et qu'on se réserve de lever le doute si cette inclinaison est aiguë ou obtuse, d'après la relation des deux côtés qui fournit une raison déterminante pour lever ce doute.

On a coutume de donner pour raison trigonométrique de l'indétermination du triangle proposé la double valeur d'un angle donné seulement par son sinus, en tant que l'angle C est déterminé par la proportion Sin.BC : Sin.AB = Sin.A : Sin.C; cette raison s'applique seulement aux deux premiers cas, dans lesquels les angles A de chacun des triangles ABC, ABC′ sont l'un et l'autre aigus ou l'un et l'autre obtus; mais elle ne s'applique pas au troisième cas dans lequel les angles en A sont l'un aigu, dans l'un des triangles, et l'autre obtus, dans l'autre de ces triangles. Je pourrais aussi, pour soutenir mon opinion, m'appuyer sur cette proposition : le sinus de A est le même pour deux valeurs de A dont l'une est le supplément de l'autre.

La véritable raison de la double solution du problème proposé me paraît être la possibilité de mener deux arcs obliques, égaux entre eux à la circonférence d'un grand cercle, depuis un point qui n'est pas le pôle de ce cercle.

En admettant, dans tous les cas, la double solution du problème proposé (du moins lorsqu'il est déterminé possible et hors de la limite), on lève l'anomalie de regarder un problème du second degré (lorsqu'il est possible) comme ayant tantôt deux solutions, tantôt une seule, et même comme pouvant n'en avoir aucune. (*)

(*) Ce qu'on peut conclure de tout ceci, c'est que, pour s'exprimer d'une manière convenable, il faut dire que le problème où il s'agit de déterminer un triangle sphérique par la connaissance de deux de ses côtés et de l'angle opposé à l'un d'eux, considéré d'une manière abstraite, admet toujours deux solutions; mais que souvent, par les circonstances de la question dont on s'occupe, une de ces solutions et même toutes les deux doivent être rejetées. La même remarque s'applique au cas où il s'agit de déterminer le triangle par la connaissance de deux de ses angles et du côté opposé à l'un d'eux.

(*Note des éditeurs.*)

On sait en effet qu'on a l'équation

$$Cos.ABCos.AC+Sin.ABSin.ACCos.A=Cos.BC\,;$$

d'où on tire, en considérant AC comme l'inconnue,

$$Cos.AC=\frac{Cos.BC\,Cos\,AB\mp\sqrt{Sin.^2BC-Sin^2ABSin.^2A}}{1-Sin.^2ABSin.^2A},$$

$$Sin.AC=\frac{Sin.ABCos.BC\,Cos.A\pm Cos.AB\sqrt{Sin.^2BC-Sin.^2ABSin.^2A}}{1-Sin.^2ABSin.^2A}.$$

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème énoncé à la page 164 de ce volume;

Par MM. Pilatte, professeur de mathématiques spéciales au lycée d'Angers, Legrand, professeur de Mathématiques, et Rochat, professeur de navigation à St-Brieux.



ÉNONCÉ. *Si, par l'un quelconque* P *des points du périmètre d'une hyperbole, on mène deux droites* PA, PB, *respectivement parallèles à ses asymptotes, et que, par un autre point quelconque* m, *pris sur ce périmètre, on mène une suite de droites coupant* PA *en* a, a′, a″, ..., PB *en* b, b′, b″, ..., *et la courbe en* n, n′, n″, ...; *on aura* $\frac{na}{nb}=\frac{n'a'}{n'b'}=\frac{n''a''}{n''b''}=..=$Constante.

Démonstration. MM Pilatte, Legrand et Rochat ont donné de ce théorème des démonstrations analitiques qui reviennent à peu près à ce qui suit.

Soient pris (fig. 5) le point P pour origine, la droite PA pour axe des x, et la droite PB pour axe des y ; l'équation de l'hyperbole sera de la forme

$$xy=hx+gy\,, \quad \text{(I)}$$

et donnera

$$y=\frac{hx}{g-x}\;;$$

si donc on désigne par α l'abscisse du point m, son ordonnée sera

$$\frac{h\alpha}{g-\alpha}.$$

En conséquence l'équation de Mn sera de la forme

$$y-\frac{h\alpha}{g-\alpha}=k(x-\alpha)\;; \qquad \text{(II)}$$

k déterminant la direction de cette droite.

Si, dans l'équation (II) on fait $y=0$, la valeur qui en résultera pour x sera celle de Pa ; on aura donc

$$Pa=\alpha-\frac{h\alpha}{k(g-\alpha)}.$$

Si ensuite on élimine y entre les équations (I) et (II), en divisant l'équation résultante par $x-a$, la valeur qui en résultera pour x sera alors l'abscisse du point n, laquelle aura pour expression

$$g-\frac{gh}{k(g-\alpha)}\;;$$

ce sera donc là aussi la projection de nb sur l'axe des x. Quant à la projection de na sur le même axe, elle est la différence des abscisses des points n' et a prises avec leurs signes ; ce sera donc

$$\left\{\alpha-\frac{h\alpha}{k(g-\alpha)}\right\}-\left\{g-\frac{gh}{k(g-\alpha)}\right\} \quad \text{ou} \quad \frac{h}{k}-(g-\alpha).$$

Ainsi, les projections de na et nb sur l'axe des x seront respectivement

$$\frac{h}{k}-(g-\alpha)=\frac{h-k(g-\alpha)}{k}\ ,$$

$$g-\frac{gh}{k(g-\alpha)}=-g.\frac{h-k(g-\alpha)}{k(g-\alpha)}\ ;$$

et comme *na* et *nb* sont proportionnelles à leurs projections sur une même droite, on doit avoir

$$\frac{na}{nb}=-\frac{h-k(g-\alpha)}{k}.\frac{k(g-\alpha)}{h-k(g-\alpha)}.\frac{1}{g}=\frac{\alpha-g}{g}$$

quantité indépendante de k, qui détermine la direction de *mn*, et qui sera conséquemment la même lorsque cette direction changera, pourvu que le point *m* reste le même.

Outre cette démonstration analitique, M. *Legrand* a donné du théorème la démonstration purement géométrique que voici :

Soient *C* le centre de la courbe ; *Cg*, *Ch* ses asymptotes ; *M*, *N* les points où elles sont rencontrées par la droite *mn* ; *G*, *H* ceux où elles sont rencontrées par les prolongemens de *PB* et *PA* ; et soit menée par le point *m* une parallèle à *Cg*, se terminant en *d* à *Ch* et coupant *PG* en *e*.

Par la propriété fondamentale de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes et par les parallèles, on a

$$dm:PG::de:Ge\ ,$$
$$PG:Ma::Ge:mM\ ,$$
$$mN:dm::Nb:de\ ;$$

proportions qui, étant multipliées par ordre, donneront, en réduisant,

$$mN:Ma::Nb:mM\ ,$$

d'où

$$Ma\times Nb=mM\times mN.$$

On aurait semblablement

$$Ma\times Nb=nM\times nN\ ;$$

ce qui fournit déjà un théorème assez remarquable.

Maintenant la proportion

$$mN:Ma::Nb:mM$$

donne

$$mN-Ma:Nb-mM::Ma:mM\ ;$$

ou, en faisant attention que $mM=nN$,

$$mn-ma:nb::Ma:mM::PG:eG$$

ou

$$na:nb::PG:eG\ ,$$

d'où

$$\frac{na}{nb}=\frac{PG}{eG}$$

quantité constante, quelle que soit la direction de mn, tant que le point m restera le même.

M. *Pilatte* indique, comme application de ce théorème, la résolution du problème suivant :

Décrire une hyperbole qui passe par trois points donnés, et dont les asymptotes soient parallèles à deux droites données ?

On tire, en effet, de la proportion ci-dessus

$$na-nb:na::PG-eG:PG\ ,$$

ou

$$ab:na::Pe:PG\ ;$$

et, si l'on mène par n une parallèle à Ch, coupant PH en f, on aura pareillement

$$ab:mb::Pf:PH.$$

Cela posé, soient m, P, n les trois points donnés ; par P soient menées des parallèles aux droites données, et conséquemment aux asymptotes ; soit menée mn, coupant PA et PB en a et b ; et soient enfin menées, parallèlement aux mêmes droites, les droites me et nf, rencontrant en e et f les prolongemens de PB et PA. Alors les

trois premiers termes de chacune des deux proportions ci-dessus se trouvant connus, on pourra déterminer PG et PH, et conséquemment les points G, H par lesquels menant des parallèles Cg et Ch aux droites données, ces parallèles seront les asymptotes de la courbe, dont la construction, par points, ne présentera plus alors aucune difficulté.

Solutions du premier des deux problèmes proposés à la page 196 de ce volume.

Première solution;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.



Le cas dans lequel le polygone proposé est un triangle, est de première facilité; en particulier il se construit par fausse position de la manière la plus simple. Il n'en est plus de même lorsque le nombre des côtés du polygone proposé est plus grand que trois.

LEMME. Soient des droites données de grandeur. On demande de couper chacune d'elles en deux parties, de manière que les rapports de ces parties, deux à deux, soient donnés, sous les conditions suivantes : on connaît le rapport d'une partie de la première à une partie de la seconde; celui de l'autre partie de la seconde à une partie de la troisième; celui de l'autre partie de la troisième à une partie de la quatrième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne au rapport de la seconde partie de la dernière à la seconde partie de la première.

Premier exemple. Que les droites données soient au nombre de deux seulement. Soient AB et A'B' deux droites données de grandeur (fig. 6), à couper en X et X', de manière que les rapports de

AX à B′X′ et de A′X′ à BX soient, l'un et l'autre, égaux à des rapports donnés.

Que le rapport donné de AX à B′X′ soit égal au rapport de AB à B′b′; et soit porté B′b′ sur B′A′ de B′ vers A′.

On a $AX : B'X' = AB : B'b'$,

d'où $BX : b'X' = AB : B'b'$;

si donc on pose $A'X' : BX = L : AB$,

il viendra $A'X' : b'X' = L : B'b'$;

on connait donc la différence A′b′ (s'il y a lieu) et le rapport des droites A′X′ et b′X′, et conséquemment ces droites sont l'une et l'autre déterminées.

Construction. Que le rapport donné de AX à B′X′ soit présenté sous la forme du rapport de AB à B′b′, et soit portée B′b′ sur B′A′. Que le rapport de A′X′ à BX soit aussi présenté sous la forme du rapport d'une droite *L* à AB. Enfin soient déterminées les droites A′X′ et b′X′ dont la différence A′b′ est donnée, et dont le rapport est celui de *L* à AB.

Remarque. Pour que le problème soit déterminé, les points b′ et A′ ne doivent pas coïncider. En effet, si le rapport de AX à B′X′ est donné égal au rapport de AB à A′B′, le rapport de BX à A′X′ se trouve déterminé à être égal au même rapport, et la question proposée demeure indéterminée. Cette question est impossible, si le rapport de AX à B′X′ étant donné égal au rapport de AB à A′B′, le rapport de BX à A′X′ n'est pas donné égal au même rapport.

Second exemple. Que les droites données soient au nombre de trois. Soient AB, A′B′, A″B″, (fig. 7) trois droites, données de grandeur, à couper en X, X′, X″, respectivement, de manière que chacun des trois rapports $AX : B'X'$, $A'X' : B''X''$, $A''X'' : BX$ soient égaux à des rapport donnés.

Que le rapport de AX à B′X′ soit égal au rapport de AB à B′a′; et soit porté B′a′ sur B′A′ de B′ vers A′.

On a $AX : B'X' = AB : B'a'$,

d'où $BX : a'X' = AB : B'a'$;

posant donc $A''X'' : BX = L : AB$,

il viendra $A''X'' : a'X' = L : B'a'$.

Soit en outre

$$L : B'a' = A''B'' : b'a' ;$$

donc $A''X'' : a'X' = A''B'' : b'a'$;

et $B''X'' : b'X' = A''B'' : b'a'$,

posant donc $A'X' : B''X'' = M : A''B''$,

il viendra enfin $A'X' : b'X' = M : b'a'$.

On connait donc la somme $A'b'$ et le rapport des droites $A'X'$ et $b'X'$; donc ces droites sont l'une et l'autre connues.

Troisième exemple. Que les droites données soient au nombre de quatre. Soient AB , $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$ (fig. 8) , quatre droites données de grandeur , à couper en X , X' , X'' , X''' , de manière que chacun des quatre rapports $AX : B'X'$, $A'X' : B''X''$, $A''X'' : B'''X'''$, $A'''X''' : BX$, soient égaux à des rapports donnés.

Soit fait $AX : B'X' = AB : B'a'$,

d'où $BX : a'X' = AB : B'a'$;

posant donc $A'''X''' : BX = L : AB$,

il viendra $A'''X''' : a'X' = L : B'a'$.

Soit encore $L : B'a' = A'''B''' : a'b'$,

d'où $A'''X''' : a'X' = A'''B''' : a'b'$;

et conséquemment $B'''X''' : b'X' = A'''B''' : a'b'$;

posant donc $A''X'' : B'''X''' = M : A'''B'''$,

il viendra $A''X'' : b'X' = M : a'b'$.

Partant, on connait, de grandeur, les droites $A'b'$ et $A''B''$, et les rapports $A'X' : B''X''$, $A''X'' : b'X'$; donc la question proposée sur quatre droites est ramenée à la question correspondante sur deux droites. Et , comme cette dernière est susceptible d'indétermination et d'impossibilité, aussi la question proposée sur quatre droites est susceptible d'indétermination et d'impossibilité.

On montrera précisément, de la même manière, que la question proposée

proposée sur cinq droites est ramenée à la question correspondante sur trois droites; et partant la question est toujours possible, déterminée et susceptible d'une seule solution. On montrera aussi que la question proposée sur six droites est ramenée à la question correspondante sur quatre droites, et partant qu'elle est susceptible d'impossibilité et d'indétermination.

En général, la question étant proposée sur un nombre quelconque de droites (plus grand que deux), elle est toujours ramenée à la question correspondante sur des droites dont le nombre est inférieur de deux unités. Si donc le nombre des droites données est impair, le problème est finalement ramené à trouver deux droites dont on connait la différence et le rapport. Afin donc que, dans ce cas, le problème soit possible et déterminé, la différence ne doit pas évanouir, et le rapport donné ne doit pas être un rapport d'égalité. Si la différence évanouit, le rapport est déterminé à être celui d'égalité, et alors la question est indéterminée.

Remarque. On résout sensiblement de la même manière les cas dans lesquels les droites données sont, en tout ou en partie, des différences des droites cherchées. Le nombre des droites données étant quelconque, pair ou impair, si le nombre de celles auxquelles répond une somme est pair, la question est susceptible d'indétermination ou d'impossibilité.

PROBLÈME. A un polygone donné, inscrire un polygone de même nom, dont les côtés soient respectivement parallèles à des droites données de position ?

Solution. Dans chacun des triangles retranchés par les côtés du polygone inscrit, lesquels ont pour bases les côtés de ce polygone et pour sommets les sommets correspondans du polygone donné; dans ces triangles, dis-je, les angles sont donnés; partant, ces triangles sont donnés d'espèce, et en particulier les rapports de ceux de leurs côtés qui font partie des côtés du polygone proposé, sont donnés. Delà la question est immédiatement ramenée au *lemme* qui vient de nous occuper.

Savoir : désignons par A, A', A'',.... A^{N-1}, A^N, les sommets du polygone donné, et par X, X', X'',.... X^{N-1}, X^N, les sommets du polygone cherché, de manière que le sommet X soit sur A^NA, le sommet X' sur AA', et ainsi de suite. On connaît les droites A^NA, AA', $A'A''$,.... $A^{N-1}A^N$, et les rapports $AX:XA'$, $A'X':X'A''$, $A''X'':X''A'''$,.... $A^NX^N:X^NA$ de leurs parties.

Puisque cette inscription est ramenée à notre *lemme*, elle est possible et unique, lorsque le nombre des côtés du polygone proposé est impair; elle est susceptible d'impossibilité ou d'indétermination, lorsque le nombre des côtés de ce polygone est pair.

Je crois devoir éclaircir l'indétermination, si elle a lieu, par quelques exemples.

Premier exemple. Soit un quadrilatère $AA'A''A'''$, (fig. 9) dont AA'' et $A'A'''$ soient les diagonales. A la diagonale $A'A'''$ soit menée arbitrairement une parallèle, se terminant en X et X''' aux côtés AA' et AA''' de ce quadrilatère. Par les points X et X''' soient menées à l'autre diagonale AA'' des parallèles, se terminant en X' et X'' aux côtés $A''A'$ et $A''A'''$, et soit enfin menée $X'X''$. J'affirme que cette droite sera, comme XX''', parallèle à la diagonale $A'A'''$; et partant que le quadrilatère $XX'X''X'''$ est un parallélogramme.

On a, en effet, par construction,

$$A''X':AX \;=A''A':A'A\;,$$
$$AX\;:AX'''=A'A\;:AA'''\;,$$
$$AX''':A''X''=AA''':A''A'''\;;$$

donc

$$A''X':A''X''=A''A':A''A'''\;;$$

donc $X'X''$ est parallèle à $A'A'''$.

Ou bien, les rapports $X'A':A'X$, $XA:AX'''$, $X'''A''':A'''X''$ étant respectivement égaux aux rapports $A''A':A'A$, $A'A:AA'''$, $AA''':A''A'''$, le rapport $A''X':A''X''$ est déterminé à être égal au rapport $A''A':A''A'''$: et le nombre des polygones équiangles inscriptibles au quadrilatère proposé est illimité.

Second exemple. Soit $AA'A''A'''A''''A^V$ un hexagone. (fig. 10) Soient

menées les diagonales AA'', $A'A'''$, $A''A''''$, $A'''A^{v}$, $A''''A$, qui retranchent deux côtés. Par un point X, pris arbitrairement sur l'un AA' des côtés, soit menée à la diagonale AA'' une parallèle terminée en X' au côté $A'A''$; par X' soit menée à la diagonale $A'A'''$ une parallèle terminée en X'' au côté $A''A'''$; soient de même menées $X''X'''$ parallèle à $A''A''''$, $X'''X''''$ parallèle à $A'''A^{v}$, $X''''X^{v}$ parallèle à $A''''A$, et soit enfin menée $X^{v}X$; j'affirme que cette dernière droite est parallèle à la diagonale $A'A^{v}$.

On a, en effet, par construction

$$XA' : A'X' = AA' : A'A'' ,$$
$$A'X' : X''A''' = A'A'' : A''A''' ,$$
$$X''A''' : A'''X''' = A''A''' : A'''A'''' ,$$
$$A'''X''' : X''''A^{v} = A'''A'''' : A''''A^{v} ,$$
$$X''''A^{v} : X^{v}A^{v} = A''''A^{v} : AA^{v} ,$$

donc
$$XA' : X^{v}A^{v} = AA' : AA^{v} ;$$

donc la droite XX^{v} est parallèle à la diagonale $A'A^{v}$.

Partant, les rapports $XA':A'X'$, $A'X':X''A'''$, $X''A''':A'''X'''$, $A'''X''':X''''A^{v}$, $X''''A^{v}:X^{v}A^{v}$ étant respectivement égaux aux rapports $AA':A'A''$, $A'A'':A''A'''$, $A''A''':A'''A^{v}$, $A'''A'''':A''''A^{v}$, $A''''A^{v}:AA^{v}$, le rapport $XA':X^{v}A^{v}$ se trouve déterminé à être égal au rapport $AA':AA^{v}$ ou encore, dans le polygone $XX'X''X'''X''''X^{v}$, les côtés XX', $X'X''$, $X''X'''$, $X'''X''''$, $X'''X^{v}$ étant respectivement parallèles aux diagonales AA'', $A'A'''$, $A''A''''$, $A'''A^{v}$, $A''''A$, le côté restant $X^{v}X$ se trouve déterminé à être parallèle à la diagonale $A^{v}A'$; et le nombre des hexagones, équiangles entre eux, inscriptibles à l'hexagone proposé, sous les conditions données, demeure illimité.

Cette propriété s'étend à tous les polygones d'un nombre de côtés pair, en menant des parallèles aux diagonales qui joignent les extrémités des côtés des angles du polygone donné.

Scholie. Le problème proposé trouve une application qui mérite

d'être mentionnée. Qu'on demande d'*inscrire à un polygone donné un polygone de même nom dont le contour soit le plus petit ?* Il est aisé de démontrer que les deux côtés de chacun des angles du polygone cherché doivent faire des angles égaux avec le côté du polygone donné sur lequel est situé le sommet de cet angle (*). Si le polygone proposé a un nombre impair de côtés, ces angles sont déterminés par les angles du polygone proposé, et l'inscription demandée est unique et déterminée. Mais, si le polygone proposé a un nombre pair de côtés, pour que le problème soit possible, la somme des angles de rang pair du polygone proposé, à partir de l'un quelconque, doit être égale à la somme de ses angles de rang impair (**). Cette égalité étant supposée, le nombre des polygones à inscrire est illimité; et ils ont tous le même plus petit contour. Cette application remarquable fait l'objet d'une dissertation qui est à la suite de mon ouvrage intitulé : *De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum.*

(*) Voyez le tome I des *Annales*, page 375, *lemme I.*

(**) Cette proposition revient à la suivante : *si entre* n *inconnues* $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}, x_n$, *on a* n *équations de la forme*

$$x_1+x_2=A_1$$
$$x_2+x_3=A_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_{n-1}+x_n=A_{n-1}$$
$$x_n+x_1=A_n$$

et que n *soit un nombre impair, ces inconnues seront déterminées. Si, au contraire,* n *est pair, le problème ne sera possible que sous certaine relation entre les données; relation qui, si elle a lieu, rendra ce problème indéterminé.*

On a, en effet, 1.° dans le cas de n impair

$$(A_1+A_3+\ldots+A_n)-(A_2+A_4+\ldots+A_{n-1})=2x_1\,;$$

2.° Dans le cas de n pair.

$$(A_1+A_3+\ldots+A_{n-1})-(A_2+A_4+\ldots+A_n)=0$$

équation de condition qui, suivant qu'elle aura ou n'aura pas lieu, rendra le problème indéterminé ou impossible.

(*Notes des éditeurs.*)

La différence que présentent, à l'égard du sujet de ce mémoire, les polygones rectilignes, suivant que le nombre de leurs côtés est pair ou impair, n'est pas la seule qui distingue ces deux classes de polygones. Je vais encore en donner deux exemples.

Qu'on demande d'inscrire à un cercle donné un polygone dont les angles soient donnés. Cette condition suffit pour déterminer le polygone cherché, lorsque le nombre de ses côtés est impair, de manière que l'inscription est toujours possible. Au contraire, le nombre des côtés étant pair, l'inscription est possible seulement, lorsque la somme des angles donnés de rang pair est égale à celle des angles donnés de rang impair. L'égalité entre ces deux sommes ayant lieu en effet, le nombre des polygones inscriptibles, sous les conditions données, demeure illimité; et, pour que le problème soit déterminé, on doit ajouter quelque condition indépendante de la connaissance des angles, et qui soit, par exemple, relative au contour ou à la surface.

De même, qu'on demande de circonscrire à un cercle donné un polygone (dont le nombre des côtés est plus grand que trois) ayant des côtés donnés; ce problème est susceptible d'une seule solution, si le nombre des côtés du polygone à construire est impair. Mais, que le nombre des côtés de ce polygone soit pair, une condition essentielle, pour que le problème soit possible, est que la somme des côtés de rang pair soit égale à la somme des côtés de rang impair. Cette égalité étant supposée, le problème est susceptible d'un nombre illimité de solutions.

Le procédé que j'ai suivi pour résoudre le problème proposé, consiste à diminuer successivement de deux unités le nombre des côtés du polygone à construire, et partant à réduire finalement la question proposée à l'inscription d'un triangle, d'une part, pour les polygones impairs, et à celle du quadrilatère, pour les polygones pairs. On peut aussi traiter chaque polygone immédiatement, sans ramener la question à un polygone d'un moindre nombre de côtés. Il me suffira d'exposer ce procédé sur un quadrilatère.

Soit $AA'A''A'''$ un quadrilatère auquel on doit inscrire un autre quadrilatère $XX'X''X'''$, dont les côtés soient respectivement parallèles à des droites données.

Que les angles du premier quadrilatère soient désignés par A, A', A'', A''' et soient faits

$$\begin{array}{ll} \text{Ang.}AXX'''=\alpha\;, & \text{Ang.}A'XX'=\beta\;, \\ \text{Ang.}A'X'X=\alpha'\;, & \text{Ang.}A''X'X''=\beta'\;, \\ \text{Ang.}A''X''X'=\alpha''\;, & \text{Ang.}A'''X''X'''=\beta''\;, \\ \text{Ang.}A'''X'''X''=\alpha'''\;, & \text{Ang.}AX'''X=\beta'''\;; \end{array}$$

soit enfin $XA'=x$, on aura

$$A'X'=x.\frac{\text{Sin.}\beta}{\text{Sin.}\alpha'}\,,\qquad A''X'=A'A''-x.\frac{\text{Sin.}\beta}{\text{Sin.}\alpha'}\,,$$

$$A''X''=A'A''.\frac{\text{Sin.}\beta'}{\text{Sin.}\alpha''}-x.\frac{\text{Sin.}\beta.\text{Sin.}\beta'}{\text{Sin.}\alpha'.\text{Sin.}\alpha''}\,,\quad A'''X''=A''A'''-A'A''.\frac{\text{Sin.}\beta'}{\text{Sin.}\alpha''}+x.\frac{\text{Sin.}\beta.\text{Sin.}\beta'}{\text{Sin.}\alpha'.\text{Sin.}\alpha''}\,,$$

$$A'''X'''=A''A'''.\frac{\text{Sin.}\beta''}{\text{Sin.}\alpha'''}-A'A''.\frac{\text{Sin.}\beta'\,\text{Sin.}\beta''}{\text{Sin.}\alpha''\text{Sin.}\alpha'''}+x.\frac{\text{Sin.}\beta.\text{Sin.}\beta'.\text{Sin.}\beta''}{\text{Sin.}\alpha'.\text{Sin.}\alpha''.\text{Sin.}\alpha'''}\,,$$

$$AX'''=A'''A-A''A'''.\frac{\text{Sin.}\beta''}{\text{Sin.}\alpha'''}+A'A''.\frac{\text{Sin.}\beta'.\text{Sin.}\beta''}{\text{Sin.}\alpha''.\text{Sin.}\alpha'''}-x.\frac{\text{Sin.}\beta.\text{Sin.}\beta'.\text{Sin.}\beta''}{\text{Sin.}\alpha'.\text{Sin.}\alpha''.\text{Sin.}\alpha'''}\,,$$

$$AX=A'''A.\frac{\text{Sin.}\beta'''}{\text{Sin.}\alpha}-A''A'''.\frac{\text{Sin.}\beta''.\text{Sin.}\beta'''}{\text{Sin.}\alpha.\text{Sin.}\alpha''}+A'A''.\frac{\text{Sin.}\beta'.\text{Sin.}\beta''.\text{Sin.}\beta'''}{\text{Sin.}\alpha.\text{Sin.}\alpha'''.\text{Sin.}\alpha''}$$

$$-x.\frac{\text{Sin.}\beta.\text{Sin.}\beta'.\text{Sin.}\beta''.\text{Sin.}\beta'''}{\text{Sin.}\alpha.\text{Sin.}\alpha'''.\text{Sin.}\alpha''.\text{Sin.}\alpha'}=AA'-x.$$

Cette dernière équation donne

$$\left\{1-\frac{\text{Sin.}\beta.\text{Sin.}\beta'.\text{Sin.}\beta''.\text{Sin.}\beta'''}{\text{Sin.}\alpha.\text{Sin.}\alpha'.\text{Sin.}\alpha''.\text{Sin.}\alpha'''}\right\}x=$$

$$AA'-A'A''.\frac{\text{Sin.}\beta'.\text{Sin.}\beta''.\text{Sin.}\beta'''}{\text{Sin.}\alpha.\text{Sin.}\alpha'''.\text{Sin.}\alpha''}+A''A'''.\frac{\text{Sin.}\beta''.\text{Sin.}\beta'''}{\text{Sin.}\alpha.\text{Sin.}\alpha''}-A'''A.\frac{\text{Sin.}\beta'''}{\text{Sin.}\alpha}\;;$$

d'où on tire

$$x=\frac{\begin{array}{c}AA'.\text{Sin}.\alpha.\text{Sin}.\alpha'.\text{Sin}.\alpha''.\text{Sin}.\alpha'''-A'A''.\text{Sin}.\alpha'.\text{Sin}\beta'.\text{Sin}.\beta''.\text{Sin}.\beta'''\\+A''A'''.\text{Sin}.\alpha'.\text{Sin}.\alpha'''.\text{Sin}\,\beta''\,\text{Sin}.\beta'''-A'''A.\text{Sin}.\alpha'.\text{Sin}\alpha''.\text{Sin}.\alpha'''.\text{Sin}.\beta''\end{array}}{\text{Sin}.\alpha.\text{Sin}.\alpha'.\text{Sin}.\alpha''.\text{Sin}.\alpha'''-\text{Sin}.\beta.\text{Sin}.\beta'.\text{Sin}.\beta''.\text{Sin}.\beta'''}.$$

Le problème est impossible si, entre les données, on a la seule équation

$$\text{Sin}.\alpha.\text{Sin}.\alpha'.\text{Sin}.\alpha''.\text{Sin}.\alpha'''.=\text{Sin}.\beta.\text{Sin}.\beta'.\text{Sin}.\beta''.\text{Sin}.\beta'''.$$

Mais si l'on a, en outre,

$$\left.\begin{array}{l}AA'.\text{Sin}.\alpha.\text{Sin}.\alpha'.\text{Sin}.\alpha''.\text{Sin}.\alpha'''\\+A''A'''.\text{Sin}.\alpha'.\text{Sin}.\alpha'''.\text{Sin}.\beta''.\text{Sin}.\beta'''\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l}A'A''.\text{Sin}.\alpha'.\text{Sin}.\beta'.\text{Sin}.\beta''.\text{Sin}.\beta'''\\+A'''A.\text{Sin}.\alpha'.\text{Sin}.\alpha''.\text{Sin}.\alpha'''.\text{Sin}.\beta''\end{array}\right.$$

le problème est indéterminé.

Si, en particulier, on a

$$\alpha=\beta\,,\quad \alpha'=\beta'\,,\quad \alpha''=\beta''\,,\quad \alpha'''=\beta'''\,,$$

la première condition est d'elle-même satisfaite, et la seconde devient

$$AA'.\text{Sin}.\alpha+A''A'''.\text{Sin}.\alpha''=A'A''.\text{Sin}.\alpha'+A'''A.\text{Sin}.\alpha'''.$$

Il faut donc alors que cette condition soit remplie pour que le problème soit possible ; et, si elle l'est en effet, ce problème demeure indéterminé.

Le procédé est exactement le même pour les polygones d'un plus grand nombre de côtés, et ne diffère de celui-ci que pour la longueur.

Lorsque le nombre des côtés du polygone proposé est impair, le dénominateur de la fraction qui exprime la valeur de x, au lieu d'être la différence de deux produits, en est la somme ; et conséquemment il n'y a lieu alors ni à impossibilité ni à indétermination.

Scholie. On peut réunir, sous un même énoncé, le problème qui fait l'objet de ce mémoire, et celui qui est résolu à la page 115 de ce volume, comme il suit : *A un polygone donné, inscrire un polygone de même nom dont quelques-uns des côtés passent par des points donnés de position, et dont les autres soient parallèles à des droites données de position ?*

Deuxième solution ;

Par M. Penjon, professeur de mathématiques au lycée d'Angers.

J'observerai d'abord que, pour que le problème proposé n'ait qu'une solution unique, il est nécessaire d'indiquer à laquelle des droites données de position chaque côté du polygone cherché doit être parallèle; car autrement, m désignant le nombre des côtés du polygone donné, et conséquemment aussi le nombre des droites données de position, le nombre des solutions du problème serait $1.2.3.....m$.

Soient S_1S_2 et S_2S_3 deux côtés consécutifs du polygone donné (fig. 11), et soit X_1X_2 le côté du polygone cherché qui répond à l'angle S_2. Par S_1 soit menée S_1K_2 parallèle à celle des droites données de position à laquelle X_1X_2 doit être lui-même parallèle. Soient $S_2S_1=a_1$, $S_2K_2=b_2 S_2X_1=x_1$, $S_2X_2=y_2$; nous aurons

$$\frac{a_1}{x_1}=\frac{b_2}{y_2} \quad \text{ou} \quad a_1y_2=b_2x_1 \ ,$$

et il est clair que, si m est le nombre des côtés du polygone proposé, nous aurons m équations semblables entre les $2m$ inconnues

$$x_1\ ,\quad x_2\ ,\quad x_3\ ,\ldots\ldots x_m\ ;$$
$$y_1\ ,\quad y_2\ ,\quad y_3\ ,\ldots\ldots y_m\ .$$

Nous aurons de plus, entre les mêmes inconnues, m autres équations de la forme $x_1+y_1=a_1$, $x_2+y_2=a_2$, ... ce qui sera suffisant pour les déterminer; et, comme ces équations sont toutes du premier degré, le problème, lorsqu'il sera possible et déterminé, n'admettra jamais plus d'une solution.

Premier exemple. Pour le triangle, les équations seront

$$a_1y_2=b_2x_1\ ,\quad x_1+y_1=a_1\ ,$$
$$a_2y_3=b_3x_2\ ,\quad x_2+y_2=a_2\ ,$$
$$a_3y_1=b_1x_3\ ,\quad x_3+y_3=a_3\ ,$$

d'où

d'où on tirera

$$x_1=a_1\frac{a_1a_2a_3-b_1a_2a_3+b_1a_2b_3}{a_1a_2a_3+b_1b_2b_3}.$$

Deuxième exemple. Pour le quadrilatère, les équations seront

$$a_1y_2=b_2x_1\ ,\quad x_1+y_1=a_1\ ,$$
$$a_2y_3=b_3x_2\ ,\quad x_2+y_2=a_2\ ,$$
$$a_3y_4=b_4x_3\ ,\quad x_3+y_3=a_3\ ;$$
$$a_4y_1=b_1x_4\ ,\quad x_4+y_4=a_4\ ,$$

d'où on tirera

$$x_1=a_1\,.\,\frac{a_1a_2a_3a_4-b_1a_2a_3a_4+b_1a_2a_3b_4-b_1a_2b_3b_4}{a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4}.$$

Ces résultats, dont la loi est manifeste, se construiront par des quatrièmes proportionnelles.

Troisième solution ;

Par M. Rochat, professeur de navigation à St-Brieux.

J'appliquerai seulement le procédé au quadrilatère ; son uniformité laissant assez apercevoir de quelle manière il peut être étendu à tout autre polygone.

Soit SS′S″S‴ le polygone donné (fig. 12) et soit XX′X″X‴ le polygone cherché. Soit construit arbitrairement un polygone AA′A″A‴, dont les côtés soient respectivement parallèles aux droites données de position, et conséquemment aux côtés du polygone cherché, et dont tous les sommets A, A′, A″ ; excepté le dernier A‴, soient respectivement sur les côtés SS′, S′S″, S″S‴ du polygone donné. Soient

enfin M, N les points où le dernier côté $S'''S$ de ce polygone est coupé par les directions $A''A'''$ et AA''' des côtés de l'angle A'''.

A cause des parallèles, on aura les proportions

$$NX''':AX::SN:SA,$$

$$AX:A'X'::S'A:S'A',$$

$$A'X':A''X''::S''A':S''A'',$$

$$A''X'':MX'''::S'''A'':S'''M;$$

lesquelles, étant multipliées par ordre, donneront, en réduisant,

$$NX''':MX'''::SN\times S'A\times S''A'\times S'''A'':SA\times S'A'\times S''A''\times S'''M$$

donc

$$NX'''-MX''' \text{ ou } MN:MX'''::$$

$$SN\times S'A\times S''A'\times S'''A''-SA\times S'A'\times S''A''\times S'''M:SA\times S'A'\times S''A''\times S'''M;$$

donc

$$MX'''=MN.\frac{SA\times S'A'\times S''A''\times S'''M}{SN\times S'A\times S''A'\times S'''A''-SA\times S'A'\times S''A''\times S'''M}.$$

cette valeur de MX''' étant construite, par des quatrièmes proportionnelles, on connaîtra la position du sommet X''', et alors il sera facile d'achever le polygone.

Quatrième solution;

Par M. Pilatte, professeur de mathématiques spéciales au lycée d'Angers.

Soit SS' (fig. 13) l'un des côtés du polygone donné; soit X

celui des sommets du poligone cherché qui doit se trouver sur la direction de ce côté, et soit fait SX$=x$.

Soit pris arbitrairement un point A sur la direction SS′, et soit opéré avec ce point A, comme on le ferait avec le point X, si, ce dernier étant connu, on voulait construire le polygone demandé. Si le dernier côté du polygone construit, à partir de A, venait se terminer à ce même point, le point A serait, en effet, le point cherché; mais en général ce dernier côté viendra se terminer en un autre point B de SS′.

Si l'on opère ensuite par rapport au point B comme par rapport au point A, on déterminera un troisième point C, dépendant du point B de la même manière que celui-ci dépend du point A.

Soient faits SA$=a$, SB$=b$, SC$=c$.

Si l'on prend le point S pour origine, et le côté SS′ pour axe des x, on se convaincra facilement que la relation entre les deux variables a et b doit être du premier degré seulement, et peut conséquemment être représentée par l'équation

$$pa+qb=r\,; \qquad \text{(I)}$$

dans laquelle p, q, r sont des constantes dépendant de la nature du polygone donné, et de la direction connue des côtés du polygone cherché.

Mais, puisque c dépend de b de la même manière que cette dernière quantité dépend de a, on doit avoir pareillement

$$pb+qc=r\,; \qquad \text{(II)}$$

or, si a eût été pris égal à x, b eût aussi été égal à x; on doit donc avoir encore

$$px+qx=r\,. \qquad \text{(III)}$$

Retranchant successivement de l'équation (III) les équations (I) et (II), il viendra, en transposant,

$$p(x-a)=-q(x-b)\ ,$$

$$p(x-b)=-q(x-c)\ ;$$

équations qui, étant divisées membre à membre, donneront

$$\frac{x-a}{x-b}=\frac{x-b}{x-c} \text{ d'où } x=\frac{b^2-ac}{2b-(a+c)}$$

expression facile à construire.

Pour plus de simplicité, on peut prendre pour le point arbitraire A le point S lui-même; on a alors $a=0$, et par conséquent

$$x=\frac{b^2}{2b-c}\ ,$$

ce qui réduit la solution du problème à la recherche d'une troisième proportionnelle à deux lignes données.

Supposons qu'on ait pris $a<x$, il est facile de se convaincre que le nombre des côtés du polygone étant impair, on aura $b>x$ et $c<x$; on aura donc aussi $a<b$, $c<b$ d'où $a+c<2b$; ainsi, dans ce cas, le dénominateur de la valeur de x ne pouvant devenir nul, le problème sera toujours possible.

Mais, a étant toujours pris $<x$, si le nombre des côtés du polygone est pair, on aura $a<x$, $b<x$, $c<x$, et il pourra fort bien arriver qu'on ait $a+c=2b$, alors le problème sera impossible, à moins cependant qu'on ait, en outre, $ac=b^2$, auquel cas le problème serait indéterminé; or, des équations

$$a+c=2b \text{ et } ac=b^2\ ,$$

il est facile de conclure

$$a=b=c\ ;$$

ainsi, dans le cas d'un nombre de côtés pair, on reconnaîtra que

le problème est impossible, si le point B se trouve au milieu de l'intervalle qui sépare les points A et C; et on reconnaîtra qu'il est indéterminé, si, le point A étant pris quelconque, le point B coïncide avec lui (*).

Cinquième solution ;

Par M. Gergonne.

1.° Soit m le nombre des côtés tant du polygone donné que du polygone à construire ; concevons une suite de polygones P, P′, P″,... dont les côtés soient respectivement parallèles aux droites données de position, et dont les $m-1$ premiers sommets soient sur les $m-1$ premiers côtés du polygone donné, et soient S, S′, S″,.. les m.mes sommets de ces polygones.

2.° Le lieu des points S, S′, S″,.... est une certaine ligne dont les intersections avec le m.me côté du polygone donné peuvent évidemment être prises pour le m.me sommet du polygone cherché.

3.° Or, il résulte des considérations développées dans les solutions précédentes, et il serait d'ailleurs très-facile de prouver *a priori*, par une simple ébauche de calcul, que le problème proposé n'est que du premier degré; donc le lieu des points S, S′, S″,.... ne peut jamais couper le m.me côté du polygone donné en plus d'un point; donc ce lieu est une ligne droite.

4.° La construction du problème proposé se réduit donc à ce qui suit : construisez arbitrairement les deux polygones P et P′ qui vous

(*) Cette méthode peut, avec quelques modifications être appliquée à la solution du problème traité à la page 116 de ce volume. Il faut seulement alors déterminer un quatrième point D, faire SD$=d$; posant alors

$$pab+qa+rb=s\,,$$
$$pbc+qb+rc=s\,,$$
$$pcd+qc+rd=s\,,$$
$$px^2+qx+rx=s\,;$$

l'élimination de p, q, r entre ces quatre équations donnera les deux valeurs de x qui résoudront le problème.

détermineront les deux points S et S′; en joignant ces deux points par une droite, l'intersection de cette droite avec le $m.^{me}$ côté du polygone donné sera le $m.^{me}$ sommet du polygone cherché.

5.° Si la droite SS′ est parallèle au $m.^{me}$ côté du polygone donné, le problème sera impossible; si, au contraire, elle se confond avec lui ou, ce qui revient au même, si les sommets S et S′ sont sur ce $m.^{me}$ côté, le problème sera indéterminé.

6.° Si m est un nombre impair, il est facile de voir que les angles S et S′ seront l'un dans l'autre, qu'ainsi leurs sommets ne pourront se trouver tous deux ni sur le $m.^{me}$ côté du polygone donné, ni sur une droite qui lui soit parallèle, et que conséquemment, dans ce cas, le problème sera toujours possible et déterminé.

7.° Mais il n'en sera plus de même si m est un nombre pair, parce qu'alors les angles S et S′ ne seront plus l'un dans l'autre.

8.° Cette construction, qui diffère peu de celle de M. Pilatte, rentre dans ce que les arithméticiens appellent *Règle de deux fausses positions*. Elle est parfaitement analogue à celle que M. Servois a donnée d'un autre problème à la page 116 de ce volume.

LETTRE

De M. DUBOURGUET, *professeur de mathématiques spéciales au lycée impérial, aux rédacteurs des* Annales.



MESSIEURS,

L'ERREUR qui s'est glissée, en écrivant la formule logarithmique qui se trouve à la page 70 du 2.e volume des *Annales*, et dont

M. Servois fait mention à la page 178 du même volume, étant corrigée, ma formule en acquiert un plus grand degré de simplicité ; et, avec la même forme qu'elle avait d'abord, la série conserve toute sa convergence. On a, en effet, toutes réductions faites,

$$\text{Log.}x=\frac{x^2-1}{x}\left\{\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{1.3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+\frac{1}{3.5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4+\frac{1}{5.7}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^6+\ldots\right]\right\}.$$

J'ai l'honneur, etc. (*)

Paris, le 6 *décembre* 1811.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de Géométrie.

A un tétraèdre donné quelconque, inscrire quatre sphères de manière que chacune d'elles touche les trois autres et trois faces du tétraèdre ?

Problème d'Alliage.

Deux vases A et B, dont les capacités sont respectivement a et b, sont remplis d'un mélange d'eau et de vin dont la proportion est connue pour chaque vase. On a deux mesures égales dont la commune contenance est c, et que l'on plonge, en même temps, dans les deux vases pour les remplir, après quoi on verse dans chaque vase le liquide tiré de l'autre. On réitère la même opération

(*) Il est bien vrai qu'au moyen de cette petite transformation, la série, en se simplifiant, reprend sa forme primitive et, avec elle, toute sa convergence, si du moins, comme on le fait assez souvent, on veut juger de la convergence d'une série par le rapport de deux termes consécutifs quelconques. Mais si, au contraire, et

n fois consécutivement ; et on demande quelle sera alors la proportion de l'eau et du vin dans chaque vase ?

---

cela paraît tout aussi naturel, on veut estimer le degré de convergence des séries par le nombre de leurs termes qu'il faut employer pour parvenir à une approximation donnée, l'assertion de M. Servois est exacte. Les termes de la première série n'étaient, en effet, multipliés que par $\frac{x-1}{x}$, tandis que ceux de la nouvelle le sont par $\frac{x^2-1}{x}$, quantité nécessairement plus grande que la première, si, comme l'exigent les usages de la formule, x est plus grand que l'unité.

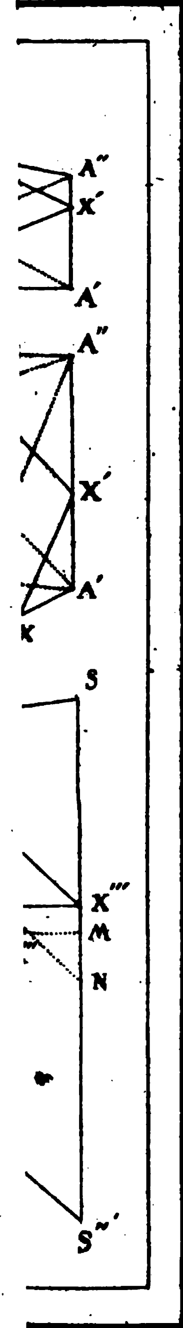
Il est donc vrai que la formule, en se modifiant, a un peu perdu, sinon de sa convergence, du moins de sa faculté approximative, et c'est là sans doute ce qu'a voulu dire M. Servois.

Mais la formule de M. Dubourguet, ainsi modifiée n'en est pas moins très-précieuse, parce qu'elle conserve toujours les avantages indiqués dans la note de la page 70 de ce volume.

(*Note des éditeurs.*)

---

ag. 257-219



G. fecit

STATIQUE.

Recherche directe et rigoureuse des centres de gravité du triangle et du tétraèdre ;

Par M. GERGONNE.



DANS la *Correspondance sur l'école polytechnique* (*), M. Berthot, professeur au lycée de Dijon, a présenté la recherche des centres de gravité du triangle et du tétraèdre, dégagée de toute considération d'infiniment petits et de limites. Sa méthode ne laisse rien à désirer du côté de la rigueur; mais c'est une réduction à l'absurde qui, comme toutes les démonstrations de ce genre, a l'inconvénient de supposer que l'on sache déjà à l'avance à quel résultat on doit parvenir. Le but que je me propose ici est de traiter les mêmes questions par des méthodes directes qui me semblent plus simples et non moins rigoureuses que celles de M. Berthot.

AXIOME. Les centres de gravité des triangles et des tétraèdres semblables sont des points homologues de ces triangles et de ces tétraèdres. (**)

(*) Tom. 1, n.° 7, pag. 229.

(**) A l'exemple d'ARCHIMEDE, j'ai cru pouvoir admettre cette proposition au nombre des *Axiomes* ; mais, si l'on en jugeait autrement, on pourrait la remplacer par la suivante qui se démontre facilement.

LEMME. Les distances des centres de gravité de deux triangles ou de deux tétraèdres semblables, aux bases de ces triangles ou tétraèdres, sont proportionnelles à leurs hauteurs.

Voici de quelle manière peut se démontrer cette proposition.

PROBLÈME. Déterminer le centre de gravité de l'aire d'un triangle quelconque ?

I. Soient H et h les hauteurs de deux triangles semblables ; soient α, β, les angles des bases de ces triangles ; soient enfin G et g les hauteurs respectives de leurs centres de gravité au-dessus de ces bases.

H, α, β, étant donnés, le premier de ces deux triangles est absolument déterminé ; son centre de gravité l'est donc aussi ; il en doit donc être de même de la distance G de ce point à la base du triangle ; le rapport de cette distance à sa hauteur doit donc être également déterminé ; et conséquemment on doit avoir, au plus,

$$\frac{H}{G}=\varphi(\alpha,\beta,H)\ ;$$

φ désignant une fonction encore inconnue, mais absolument déterminée.

Or, il est impossible que H, qui est une ligne, entre dans le second membre de cette équation, puisqu'alors cette ligne se trouverait être seulement fonction des deux angles α, β, et du nombre abstrait $\frac{H}{G}$. On doit donc avoir simplement

$$\frac{H}{G}=\varphi(\alpha,\beta)\ ;$$

on aura donc pareillement, pour l'autre triangle,

$$\frac{h}{g}=\varphi(\alpha,\beta)\ ;$$

d'où on conclura

$$\frac{H}{G}=\frac{h}{g}.$$

II. Si H et h sont les hauteurs de deux tétraèdres semblables dont G et g soient les hauteurs respectives des centres de gravité au-dessus des plans de leurs bases ; en désignant par α, β, deux des angles de ces bases, et par γ, δ, ε, les angles dièdres que les trois autres faces forment avec elles ; par un raisonnement semblable au précédent on prouvera que, bien que la détermination complète des deux tétraèdres exige que l'on connaisse, outre les cinq angles α, β, γ, δ, ε, leurs hauteurs H et h, on doit néanmoins avoir

$$\frac{H}{G}=\psi(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)\ ,\quad \frac{h}{g}=\psi(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)\ ;$$

et conséquemment

$$\frac{H}{G}=\frac{h}{g}.$$

Solution. Soit ABC (fig. 1) un triangle dont on cherche le centre de gravité ; soient m , n , p les milieux de ses côtés. En joignant ces points par des droites, on divisera le triangle donné en quatre autres qui lui seront semblables, et dont les dimensions seront moitié des siennes.

Soit pris AB pour base du triangle donné, et soient pris ses homologues Ap, pB, nm, mn, pour bases des triangles résultant de sa décomposition. Soient T l'aire du triangle donné, H sa hauteur et G la distance de son centre de gravité à sa base ; soient t , h , g , des quantités analogues, pour l'un des petits triangles; on aura (*Axiome*)

$$T=4t\ ,\quad H=2h\ ,\quad G=2g.$$

Remarquons présentement que les distances des centres de gravité des deux triangles Anp et pmB à la droite AB sont également g; que celle du centre de gravité de mpn à cette droite est $h-g$; et qu'enfin celle du centre de gravité de nCm à la même droite est $h+g$.

Si donc on prend AB pour axe des momens, on devra avoir

$$TG=tg+tg+t(h-g)+t(h+g)=2t(g+h)\ ;$$

d'où

$$4TG=4t(2g+2h)=T(G+H)\ ;$$

donc

$$3G=H \qquad \text{d'où} \qquad G=\tfrac{1}{3}H.$$

Ainsi, *La distance du centre de gravité de l'aire d'un triangle à la base de ce triangle est le tiers de sa hauteur* ; d'où il est aisé de conclure que *ce centre se trouve à l'intersection des droites qui joignent les sommets du triangle aux milieux des côtés opposés.*

LEMME. Le centre de gravité du volume d'un octaèdre, régulier ou non régulier, mais dont les faces opposées sont des triangles égaux ayant leurs plans parallèles, est à son centre de figure ; c'est-à-dire, au milieu de la droite qui joint deux sommets opposés

quelconques ; ou encore à l'intersection des trois plans qui divisent l'octaèdre en deux pyramides quadrangulaires égales ; d'où il suit que la distance de ce centre à l'une des faces de l'octaèdre est moitié de l'intervalle qui sépare cette face de celle qui lui est opposée.

Démonstration. Il est aisé de se convaincre, en effet, que l'octaèdre dont il s'agit ici est symétrique par rapport à trois plans passant par le point que nous assignons comme son centre de gravité. (*)

PROBLÈME. Déterminer le centre de gravité du volume d'un tétraèdre ?

Soit ABCD (fig. 2) un tétraèdre dont il s'agit de déterminer le centre de gravité. A la moitié de la distance entre ses sommets et les faces opposées soient conduits des plans parallèles à ceux de ces faces ; ces plans en détacheront quatre tetraèdres $qAnp$, $rpmB$, $snCm$, $Dqsr$, qui lui seront semblables, et qui, ayant leurs arêtes moitié des siennes, auront chacun le 8.me de son volume. Ces tétraèdres enlevés, il restera un octaèdre $mnpqrs$, ayant ses faces opposées égales et parallèles, et un volume moitié moindre que celui du tétraèdre proposé.

Soit prise ABC pour base du tétraèdre ABCD, et soient prises pour bases des quatre petits tétraèdres les faces homologues à celles-là. Soient désignés par T le volume du tétraèdre proposé, par H sa hauteur, et par G la distance de son centre de gravité au plan de sa base. Soient désignées par t, h, g les quantités analogues, pour chacun des petits tétraèdres ; et soit enfin désigné par O le volume de l'octaèdre ; nous aurons (*Axiome*)

$$T=8t\ ,\quad O=4t\ ,\quad H=2h\ ,\quad G=2g.$$

Remarquons présentement que la distance du centre de gravité de chacun des petits tétraèdres $qAnp$, $rpmB$, $snCm$ au plan ABC est g ; que celle du centre de gravité de $Dqsr$ à ce plan est $g+h$; et

(*) Voyez le tome 1.er des *Annales*, page 355 et suivantes.

qu'enfin celle du centre de gravité de l'octaèdre au même plan est (*Lemme*) égale à $\frac{1}{2}h$.

En prenant donc ABC pour le plan des momens, on devra avoir

$$TG=tg+tg+tg+t(g+h)+O.\tfrac{1}{2}h=4tg+th+\tfrac{1}{2}Oh=t(4g+3h)\ ;$$

donc

$$16TG=8t(8g+6h)=T(4G+3H)\ ;$$

ou

$$16G=4G+3H\ ;$$

d'où

$$G=\tfrac{1}{4}H.$$

Ainsi, *la distance du centre de gravité du volume d'un tétraèdre au plan de sa base est le quart de sa hauteur*; d'où il est facile de conclure que *ce centre est situé à l'intersection des droites qui joignent les sommets du tétraèdre aux centres de gravité des aires des faces opposées*; et, par suite, qu'*il est situé au milieu de la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées quelconques.* (*)

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du dernier des deux problèmes proposés à la page 196 de ce volume;

Première solution;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

§. 1.

Lemme. I. Trouver deux droites dont on connait le rectangle et la différence des carrés; ou, déterminer un triangle rectangle dont on

---

(*) Voyez la *Correspondance sur l'école polytechnique*, tome II, n.° 2, page 96.

connaît une des jambes de l'angle droit, et le rectangle de l'hypothénuse par l'autre jambe de l'angle droit ?

Soit ABX (fig. 3) un triangle rectangle dont on connaît une des jambes AB de l'angle droit, et le rectangle de l'hypothénuse AX par l'autre jambe BX de l'angle droit ; on demande ce triangle.

Que le rectangle donné $AX \times BX$ soit égal au rectangle du côté donné AB par une droite L, en sorte qu'on ait $AX \times BX = AB \times L$; on déduira de là

$$AX : AB = L : BX ,$$

et

$$AX^2 : AB^2 = L^2 : BX^2 ,$$

d'où

$$AX^2 : AB \times L = AB \times L : BX^2 .$$

Soit conçue la droite XZ perpendiculaire à AX et qui rencontre en Z le côté AB prolongé ; on aura

$$AX^2 = AB \times AZ , \quad BX^2 = AB \times BZ ;$$

donc

$$AZ : L = L : BZ ;$$

donc on connaît la différence AB et le rectangle L^2 des deux droites AZ et BZ ; donc ces droites sont données.

Construction. Que le côté AB soit prolongé en Z, de manière que le rectangle $AZ \times BZ$ soit égal au carré de la droite donnée L. Sur AZ, comme diamètre, soit décrit un demi-cercle dont la circonférence rencontre en X la perpendiculaire à AB élevée depuis le point B ; en menant AX, le triangle AXB sera le triangle demandé.

En appliquant le calcul à cette construction, on trouve d'abord

$$AZ = \sqrt{\tfrac{1}{4}AB^2 + L^2} + \tfrac{1}{2}AB ,$$

$$BZ = \sqrt{\tfrac{1}{4}AB^2 + L^2} - \tfrac{1}{2}AB ;$$

et ensuite

$$AX^2 = AB\left\{\sqrt{\tfrac{1}{4}AB^2 + L^2} + \tfrac{1}{2}AB\right\} ,$$

$$BX^2 = AB\left\{\sqrt{\tfrac{1}{4}AB^2 + L^2} - \tfrac{1}{2}AB\right\} .$$

Remarque. On peut traiter ce problème d'une manière purement algébrique comme il suit.

Soient

$$AX=x\,,\quad BX=y\,,\quad AB=a\,,$$

les équations du problème seront

$$x^2-y^2=a^2\quad,\qquad xy=al\,,$$

ajoutant au carré de la première le quadruple du carré de la seconde, il viendra, en extrayant la racine quarrée de l'équation résultante,

$$x^2+y^2=2a\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+l^2}\,,$$

mais on a

$$x^2-y^2=a^2\,;$$

donc

$$x^2=a\left\{\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+l^2}+\tfrac{1}{2}a\right\}\,,$$
$$y^2=a\left\{\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+l^2}-\tfrac{1}{2}a\right\}.$$

§. 2.

LEMME. II. Soient deux droites parallèles entre elles, données de position ; et soit un point donné de position, sur le plan de ces droites. On demande, sur l'une des parallèles, un point duquel menant deux droites perpendiculaires entre elles, dont une passe par le point donné, et dont l'autre soit terminée à la seconde des parallèles données, la différence des carrés de ces droites soit donnée?

Soient AA′, BB′, (fig. 4) deux droites parallèles entre elles, données de position ; et soit P un point donné sur le plan de ces parallèles. On demande, sur l'une de ces droites, telle que AA′, un point X, duquel menant deux droites, l'une XP au point donné P, et l'autre XZ, perpendiculaire à XP, et terminée en Z à l'autre parallèle ; la différence des carrés de XZ et de PX soit donnée de grandeur ?

Des points P et Z soient abaissées sur AA′ les perpendiculaires

PA et ZY. L'angle PXZ étant supposé droit, les angles PXA, ZXY, valent ensemble un angle droit, et partant les triangles PXA, XZY sont équiangles ; donc

$$PA:AX=XY:ZY \quad \text{ou} \quad AP\times ZY=AX\times XY.$$

Mais les droites PA et ZY sont données de grandeur ; donc le rectangle $AX\times XY$ est aussi donné de grandeur.

Or, $$PX^2=AP^2+AX^2,$$
et $$XZ^2=ZY^2+XY^2,$$
donc $$XZ^2-PX^2=(ZY^2-AP^2)+(XY^2-AX^2).$$

Donc, on connaît le rectangle des droites XY et AX, et la différence de leurs carrés ; donc (*Lemme* 1) ces droites sont l'une et l'autre connues.

§. 3.

PROBLÈME. Couper un prisme triangulaire donné par un plan, de manière que la section soit donnée d'espèce ?

Soit B (fig. 5) un point donné, sur l'une BB' des arêtes d'un prisme triangulaire, dont les deux autres arêtes sont AA', CC'. On demande de couper ce prisme par un plan passant par D, de manière que la section soit donnée d'espèce ?

Soit BXY la section cherchée.

Analise. Du point B soit abaissée sur le plan de la face opposée la perpendiculaire BP. Du point P soit abaissée sur la commune section XY de cette face et du plan cherché la perpendiculaire PZ ; et soit menée BZ. La droite BZ sera la hauteur de la section, en prenant XY pour base et B pour sommet.

Le triangle BXY étant donné d'espèce, le rapport de XZ à ZY est connu, et partant le point Z appartient à une droite donnée de position, parallèle à AA' et CC', et sur le plan de ces droites ; soit cette droite DD'.

Le rapport de XZ à BZ est aussi donné ; et partant si, sur la droite XZ, on conçoit portée une droite ZV égale à BZ, le point

V.

V appartiendra aussi à une droite donnée de position, parallèle à DD′, et toujours dans le plan de AA′ et CC′. Soit EE′ cette droite.

Cela posé, la différence des carrés de BZ et PZ est égale au carré de la droite donnée BP ; donc aussi la différence des carrés de ZV et de PZ est égale au carré de la droite donnée BP, et les droites PZ et ZV sont l'une perpendiculaire à l'autre ; donc (*Lemme*) ces droites sont déterminées. De là découle la construction suivante :

Construction. Du point B soit abaissée sur la face opposée une perpendiculaire BP. Sur cette face soient déterminées deux droites (parallèles aux arêtes du prisme) telles que, menant une droite quelconque sur le plan de cette face, les parties de cette droite, comprises entre la première parallèle et les deux arêtes, soient entre elles dans le rapport donné des segmens faits sur la base de la section, par la perpendiculaire abaissée de son sommet sur cette base ; et que la partie de la même droite, comprise entre ces deux parallèles, soit à la partie de cette droite comprise entre la première et l'une des deux arêtes dans le rapport donné de la hauteur du même triangle au segment correspondant de sa base. Que DD′ et EE′ soient ces deux parallèles. Soit déterminé sur la première (*Lemme* 2) un point Z tel que, menant de ce point deux droites perpendiculaires entre elles, l'une ZP, terminée au pied P de la perpendiculaire BP, et l'autre ZV, terminée en V sur EE′, la différence des carrés de ces deux droites soit égale au carré de la perpendiculaire BP. La section XBZ qui passera par le point B et par la droite ZV, sera la section cherchée.

§. 4.

Application au problème proposé. Que la projection donnée d'espèce soit prise pour base d'un prisme droit ; soit coupé ce prisme par un plan, de manière que la section soit semblable au triangle donné. La base du prisme et la section sont entre elles comme la projection demandée du triangle proposé est à ce triangle.

Corollaire. Un parallélogramme étant proposé, on peut le projeter

orthographiquement, de manière que sa projection soit un autre parallélogramme donné d'espèce. En particulier, on peut projeter un parallelogramme orthographiquement, de manière que sa projection soit un carré.

§. 5.

On peut rechercher immédiatement les angles que les côtés BX et BY font avec l'arête BB′, et partant l'inclinaison des plans du triangle projeté et de sa projection orthographique donnée d'espèce.

Que les côtés BA et BC de la section perpendiculaire aux arêtes adjacents au point B soient désignés par a et c; que l'angle compris soit désigné par β; que les angles B′BX et B′BY soient désignés par x et par y; que l'angle B du triangle XBY soit désigné par b; qu'enfin le rapport des côtés BX et BY soit celui de α à γ; on aura

$$a=\text{BXSin.}x \quad , \quad c=\text{BYSin.}y$$

donc

$$a:c=\alpha\text{Sin.}x:\gamma\text{Sin.}y \quad \text{d'où} \quad c\text{Sin.}x=\gamma\text{Sin.}y \;;$$

donc

$$\text{Sin.}y=\frac{c}{\gamma}\text{Sin.}x \;, \quad \text{Cos.}y=\sqrt{1-\frac{c^2}{\gamma^2}\text{Sin.}^2x} \;.$$

Or, dans l'angle solide triangulaire formé en B, par les angles B′BX, B′BY, XBY, on a

$$\text{Cos.}\beta=\frac{\text{Cos.}b-\text{Cos.}x\text{Cos.}y}{\text{Sin.}x\text{Sin.}y}.$$

Mettant pour Sin.y et Cos.y leurs valeurs et chassant les dénominateurs, il viendra

$$c\text{Cos.}\beta\text{Sin.}^2x=\gamma\text{Cos.}b-\text{Cos.}x.\sqrt{\gamma^2-c^2\text{Sin.}^2x} \;,$$

dégageant cette équation de l'irrationnalité, et mettant pour Cos.^2x sa valeur $1-\text{Sin.}^2x$, elle deviendra, toutes réductions faites,

$$c^2\text{Sin.}^2\beta\text{Sin.}^4x-(c^2-2c\gamma\text{Cos.}b\text{Cos.}\beta+\gamma^2)\text{Sin.}^2x+\gamma^2\text{Sin.}^2b=0 \;;$$

on obtiendra de même,

$$\gamma^4 \text{Sin.}^2\beta \text{Sin.}^4 y - \gamma^2(c^2 - 2c\gamma \text{Cos}b \text{Cos.}\beta + \gamma^2)\text{Sin.}^2 y + c^2\gamma^2 \text{Sin.}^2 l = 0.$$

Lorsqu'on a déterminé les angles x et y, on a déterminé les rapports des dimensions du triangle à projeter et de sa projection ; partant aussi on a déterminé le rapport des surfaces de ce triangle et de sa projection. Or, ce rapport est celui du sinus total au cosinus de l'inclinaison de leurs plans entre eux ; partant cette inclinaison est connue.

§. 6

Le problème qui fait l'objet du *Lemme premier* est un cas particulier d'un problème plus général, dans lequel l'angle B au lieu d'être droit est un angle quelconque.

Ce problème général est solide. Je vais en exposer la solution par l'intersection du cercle et d'une parabole.

Soit ABX un triangle (fig. 6) dont on connaît un côté AB, un angle B sur ce côté, différent d'un droit, et le rectangle des deux autres côtés AX et BX, on demande ce triangle.

Soit Ab perpendiculaire à BX ; et que le rectangle donné soit égal au rectangle de la perpendiculaire Ab par une droite l donnée de grandeur.

Puisqu'on a

$$AX \times BX = Ab \times l,$$

on doit avoir

$$AX : Ab = l : BX \quad \text{d'où} \quad AX^2 : Ab^2 = l^2 : BX^2 ;$$

donc

$$AX^2 - Ab^2 : Ab^2 = l^2 - BX^2 : BX^2,$$

ou

$$bX^2 : Ab^2 = l^2 - BX^2 : BX^2.$$

Du point B comme centre, avec le rayon l soit décrit un cercle ; et que la perpendiculaire élevée à BX depuis le point X rencontre

en Y la circonférence de ce cercle ; on aura $l^2—BX^2=XY^2$; donc

$$bX:Ab=XY:BX\ ,$$

d'où

$$Ab\times XY=bX\times BX\ ;$$

donc le point Y est à une parabole dont Bb est une double coordonnée de l'axe, et dont le paramètre est la perpendiculaire Ab.

Remarque. La parabole qui passe par le centre B du cercle dont le rayon est l, coupe toujours en deux points, au moins, la circonférence de ce cercle ; mais elle peut aussi couper cette circonférence en deux autres points, ou la toucher en un point ou ne la rencontrer en aucun autre point. Au cas du contact répond une limite, en petitesse, du rectangle proposé. Comme ce problème est seulement accessoire au but principal de ce mémoire, je ne crois pas devoir insister sur la discussion de ces différens cas.

Ce dernier problème, envisagé algébriquement, conduit à une équation du quatrième degré.

Soit $AB=a$, et que l'angle B soit désigné par φ. Soit $BX=x$, le rectangle donné est $x\sqrt{x^2—2ax\text{Cos.}\varphi+a^2}$; que ce rectangle soit p^2, on a l'équation

$$x^4—2ax^3\text{Cos.}\varphi+a^2x^2—p^4=0\ ;$$

cette équation a au moins deux racines réelles.

Deuxième solution ;

Par M. D. Encontre, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Montpellier ;

I. Soit ABC (fig. 7) le triangle qu'il s'agit de projeter, ses projections sur tous les plans parallèles à celui sur lequel on le projetera seront toutes égales. Nous pouvons donc supposer que le plan de projection passe par tel point qu'il nous plaira de choisir ; et nous choisirons le point A.

II. Soit menée AE parallèle à BC, les angles CAE et ACB seront égaux et les projections de BC et AE seront parallèles. Si donc nous parvenons à projeter AB, AC, AE, de manière que leurs projections forment des angles donnés, les projections de AB, AC, BC formeront aussi des angles donnés; d'où il suit que la question se réduit à trouver un plan sur lequel projetant orthogonalement deux angles adjacens donnés, compris dans un même plan, leurs projections soient des angles donnés. (*)

III. Soient BAC, CAD (fig. 8) les deux angles adjacens proposés; prenons, à volonté, la longueur AB, et par B concevons, dans le plan BAD, une droite BCD, parallèle à la commune section AE des deux plans; la direction de cette droite n'est pas connue.

Soient menées AF, perpendiculaire sur BD; puis Bb, Ff, Cc, Dd perpendiculaires sur le plan de projection; ces perpendiculaires seront égales, et auront leurs pieds sur une même droite bd parallèle à BD.

Joignons Ab, Af, Ac, Ad, les angles AbB, AfF, AcC, AdD seront droits, Af sera perpendiculaire à bd qui est parallèle à BD; ainsi les droites FA et fA étant toutes deux perpendiculaires au même point A de la commune section AE des deux plans, l'angle linéaire FAf qu'elles formeront mesurera l'angle formé par ces deux plans.

IV. Faisons l'arbitraire $AB=1$; faisons en outre $\text{Sin.}BAC=\alpha$; $\text{Sin.}BAD=\beta$, $\text{Sin.}bAc=\gamma$, $\text{Sin.}bAd=\delta$.
Toutes ces quantités sont connues.

Faisons encore $Bb=Ff=Cc=Dd=x$, et $\text{Sin.}ABD=y$.
Ces quantités sont inconnues.

(*) Le problème envisagé de cette manière revient à celui-ci : *Etant données les différences tant des longitudes que des ascensions droites de trois points de l'écliptique, déterminer son inclinaison à l'équateur et le lieu de l'équinoxe?* Les deux angles à projeter sont les différences entre les trois longitudes; les angles que doivent former leurs projections sont les différences des ascensions droites; enfin l'inclinaison des deux plans est l'obliquité de l'écliptique.

(*Note des éditeurs.*)

On a

$$\text{Sin.ACB}=\text{Sin.(BAC+CBA)}=\alpha\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-\alpha^2}=\text{P} ,$$

$$\text{Sin.ADB}=\text{Sin.(BAD+DBA)}=\beta\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-\alpha^2}=\text{Q} ;$$

en faisant donc entrer P et Q dans le calcul, nous n'introduirons pas de nouvelles inconnues.

V. d'après cela on a

$$\text{AF}=\frac{\text{Sin.ABF}}{\text{AB}}=y , \quad \text{Sin.FA}f=\frac{\text{F}f}{\text{AF}}=\frac{x}{y} ,$$

$$\text{Cos.FA}f=\frac{1}{y}\sqrt{y^2-x^2} , \quad \text{AC}=\frac{\text{AF}}{\text{Sin.ACF}}=\frac{y}{\text{P}} ,$$

$$\text{A}c=\sqrt{\text{AC}^2-\text{C}c^2}=\frac{1}{\text{P}}\sqrt{y^2-\text{P}^2x^2} ,$$

$$\text{AD}=\frac{\text{AF}}{\text{Sin.ADF}}=\frac{y}{\text{Q}} , \quad \text{A}b=\sqrt{1-x^2} ,$$

$$\text{A}d=\sqrt{\text{AD}^2-\text{D}d^2}=\frac{1}{\text{Q}}\sqrt{y^2-\text{Q}^2x^2} .$$

VI. Il ne s'agit plus maintenant que de trouver deux équations entre les deux inconnues x et y. Or, on sait que les aires des triangles BAC, BAD multipliées par le cosinus de l'angle FAf doivent donner pour produits les aires des triangles bAc, bAd; on sait d'ailleurs que

$$\text{BAC}=\tfrac{1}{2}\text{AB}\times\text{AC}\times\text{Sin.BAC} ,$$
$$b\text{A}c=\tfrac{1}{2}\text{A}b\times\text{A}c\times\text{Sin.}\,b\text{A}c ,$$
$$\text{BAD}=\tfrac{1}{2}\text{AB}\times\text{AD}\times\text{Sin.BAD} ,$$
$$b\text{A}d=\tfrac{1}{2}\text{A}b\times\text{A}d\times\text{Sin.}b\text{A}d ,$$

donc

$$\alpha\sqrt{y^2-x^2}=\delta\sqrt{1-x^2}.\sqrt{y^2-\text{P}^2x^2} ,$$
$$\beta\sqrt{y^2-x^2}=\delta\sqrt{1-x^2}.\sqrt{y^2-\text{Q}^2x^2} .$$

On peut simplifier ces équations ; mais l'équation finale à laquelle on parviendra, en éliminant, sera nécessairement très-compliquée.

Troisième solution ;

Par M. Tédenat, correspondant de la première classe de l'Institut, recteur de l'académie de Nismes.

Soit ACB le triangle à projeter, (fig. 9) et supposons, ce qui est permis, que le plan de projection passe par le point C ; soit CD l'intersection du plan de cette projection avec le plan du triangle ACB ; des points A et B soient abaissées, sur le plan de projection, les perpendiculaires AA'', BB'' ; en joignant CA'', CB'', A''B'', le triangle A''CB'' sera la projection du triangle ACB, et les prolongemens des droites AB, A''B'' devront rencontrer en un même point D l'intersection des plans des deux triangles. Soient enfin prolongés les droites CA'', CB'' en A' et B', de telle sorte que CA', CB' soient respectivement égales aux deux côtés de l'angle égal à C dans le triangle donné d'espèce auquel la projection de ACB doit être semblable. En joignant A'B', cette droite sera parallèle à A''B'', et A'CB' sera ce triangle donné d'espèce.

Les triangles ACB, A'CB' étant donnés, posons

$$CA=a\ ,\quad CB=b\ ,\quad \text{Ang.}ACB=\gamma\ ,\quad AB=c$$
$$CA'=a'\ ,\quad CB'=b'\ ,\quad \text{Ang.}A'CB'=\gamma'\ ;\quad A'B'=c'$$

en désignant par λ le rapport inconnu entre les côtés homologues des deux triangles A'CB', A''CB'', on aura

$$CA''=\lambda a'\ ,\quad CB''=\lambda b'\ ,\quad A''B''=\lambda c'\ ;$$

on aura de plus

$$\text{Aire de } ACB=\tfrac{1}{2}ab\text{Sin.}\gamma\ ,\quad \text{Aire de } A''CB''=\tfrac{1}{2}\lambda^2a'b'\text{Sin.}\gamma'\ ;$$

Si donc l'on désigne par θ l'inclinaison des deux plans, on aura, comme l'on sait

$$\lambda^2a'b'\text{Sin.}\gamma'=ab\text{Sin.}\gamma\text{Cos.}\theta \qquad \text{(I)}$$

Présentement, en faisant $AA''=x$, $BB''=y$, les triangles rectangles $AA''C$ et $BB''C$, et le quadrilatère bi-rectangle $AA''B''B$ donneront

$$x^2=a^2-\lambda^2a'^2\,,\quad y^2=b^2-\lambda^2b'^2\,,$$
$$(x-y)^2=c^2-\lambda^2c'^2\,;$$

La dernière de ces équations étant retranchée de la somme de deux autres, il viendra

$$2xy=a^2+b^2-c^2-\lambda^2(a'^2+b'^2-c'^2)=2ab\text{Cos.}\gamma-2\lambda^2a'b'\text{Cos.}\gamma'\,;$$

ou en divisant par 2 et quarrant

$$x^2y^2=a^2b^2\text{Cos.}^2\gamma-2\gamma^2aba'b'\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\gamma'+\lambda^4a'^2b'^2\text{Cos.}^2\gamma\,;$$

égalant cette valeur de x^2y^2 à celle qui résulte de la multiplication des deux premières équations, en changeant les cosinus en sinus, il viendra

$$\lambda^4a'^2b'^2\text{Sin.}^2\gamma-(a^2b'^2-2aa'bb'\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\gamma'+a'^2b^2)\lambda^2+a^2b^2\text{Sin.}\gamma=0\,;$$

substituant enfin pour λ^2 sa valeur donnée par l'équation (1), on aura

$$a^2a'b^2b'\text{Sin.}\gamma\text{Sin.}\gamma'\text{Cos.}^2\theta-ab(a^2b'^2-2aa'bb'\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\gamma'+a'^2b^2)\text{Cos.}\theta$$
$$+a^2a'b^2b'\text{Sin.}\gamma\text{Sin.}\gamma'=0.$$

Cette équation donnera, étant résolue, la valeur de $\text{Cos}\theta$. (*) d'où

(*) En posant, pour abréger,

$$a^2b'^2-2aa'bb'\text{Cos.}(\gamma+\gamma')+a'^2b^2=M^2\,,$$
$$a^2b'^2-2aa'bb'\text{Cos.}(\gamma-\gamma')+a'^2b^2=N^2\,;$$

d'où

$$a^2b'^2-2aa'bb'\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\gamma'+a'^2b^2=\tfrac{1}{2}(M^2+N^2)\,;$$
$$2aa'bb'\text{Sin.}\gamma\text{Cos.}\gamma=\tfrac{1}{2}(M^2-N^2)\,;$$

les valeurs de $\text{Cos.}\theta$ prendront cette forme très-simple

$$\text{Cos.}\theta=\frac{(M\pm N)^2}{M^2-N^2}=\frac{M\pm N}{M\mp N}\,;$$

or, comme l'adoption des signes supérieurs conduirait à l'absurdité $\text{Cos.}\theta>1$, il faudra simplement écrire

$$\text{Cos.}\theta=\frac{M-N}{M+N}\,;$$

ce qui fournit cette construction très-remarquable :

on

on conclura celle de λ, au moyen de l'équation (I); alors on aura x et y par les équations

$$x^2=a^2-\lambda^2a'^2\ ,\quad y^2=b^2-\lambda^2b'^2\ ;$$

on pourra donc connaître l'angle BCB''; cet angle étant déterminé, l'angle trièdre rectangle dont les arêtes sont CB'', CB, CD donnera

$$\text{Sin.BCD}=\frac{\text{Sin.BCB}''}{\text{Sin.}\theta}\ ,$$

et on aura enfin, dans le même angle trièdre

$$\text{Tang.B}''\text{CD}=\text{Tang.BCDCos.}\theta\ ;$$

alors on pourra sans peine construire la situation respective des deux triangles ACB et A''CB'' sur le développement de l'angle drièdre formé par leurs plans.

Quatrième, Cinquième et Sixième solutions;

Par MM. Pilatte et Penjon, Professeurs de mathématiques au lycée d'Angers; et MM. Rochat et Legrand, professeurs à Saint-Brieux.

La marche de M. Penjon diffère peu de celle de M. Tédenat, si ce n'est qu'il prend pour inconnue le côté CA'', ce qui le conduit à une équation du quatrième degré se résolvant comme une du second.

« Cherchez une moyenne proportionnelle entre CA et CB', et une autre entre » CB et CA'; faites de ces deux lignes deux côtés de deux triangles, dont l'an» gle compris soit pour l'un la somme et pour l'autre la différence des deux » angles ACB et A'CB'; si alors vous construisez un triangle rectangle dont l'hypo» thénuse soit la somme, et un côté de l'angle droit la différence des troisièmes » côtés de ces triangles, l'angle opposé à l'autre côté de l'angle droit dans ce triangle » rectangle, mesurera l'inclinaison des deux plans. »

(*Note des éditeurs.*)

M. Pilatte traite la question par la géométrie analitique, en prenant le plan de projection pour le plan des xy et le point C pour origine des coordonnées rectangulaires ; il ne se permet, au surplus, d'autres simplifications que de prendre pour plan des xz le plan même du triangle AA″C. Prenant alors pour inconnue la coordonnée CA″ du point A, ce qui rentre dans le système de M. Penjon, il parvient, comme lui, à une équation du quatrième degré se résolvant comme une du second, et à l'aide de laquelle il construit les projections du triangle ACB sur les plans des xz et des xy. Nous ferions connaître ses constructions, beaucoup plus simples que la forme de l'équation ne semble le promettre, si nous n'avions à indiquer bientôt une méthode très-élégante pour résoudre le problème, par des considérations purement géométriques.

MM. Rochat et Legrand ont réduit la question à chercher la direction des arêtes latérales d'un prisme droit triangulaire ayant pour base supérieure le triangle à projeter, et pour base inférieure la projection de ce triangle. Soient donc (fig. 10) ACB la base supérieure de ce prisme, A′C′B′ sa base inférieure, et soit fait passer par C un plan aCb parallèle à cette dernière. Soient Ang.ACC′$=x$, Ang.BCC′$=y$, Ang.ACB$=\gamma$, Ang.A′C′B′$=\gamma'$, $\frac{\text{CA}}{\text{CB}}=m$, $\frac{\text{C'A'}}{\text{C'B'}}=m'$; l'angle trièdre dont les arêtes sont CA, CB, CC′ donnera

$$\text{Sin.}x\text{Sin.}y\text{Cos.}\gamma'=\text{Cos.}\gamma-\text{Cos.}x\text{Cos.}y\ ;$$

les deux triangles rectangles CaA, CbB donneront ensuite Ca ou C′A′$=$CASin.x et Cb ou C′B′$=$CBSin.y ; d'où l'on conclut, par division, $m'=m\frac{\text{Sin.}x}{\text{Sin.}y}$, c'est-à-dire,

$$m\text{Sin.}x=m'\text{Sin.}y\ ;$$

au moyen de cette équation et de la précédente, on trouve facilement, soit pour Sin.x, soit pour Sin.y, une équation du 4.me degré se résolvant comme une du second.

Septième solution ;

Construction géométrique du problème ;

Par M. Vecten, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Nismes.

LEMME I. Si plusieurs triangles semblables ACB, A′C′B′ (fig. 11) ont leurs angles homologues C, C′ inscrits au même arc aC′Cb, et que, dans chacun d'eux, on mène la droite CM, C′M′ qui joint le sommet C, C′ au milieu M, M′ du côté opposé AB, A′B′; les prolongemens des droites CM, C′M′ iront tous concourir en un même point m, sur la circonférence dont l'arc aC′Cb fait partie.

Démonstration. Dans les triangles semblables, les droites qui joignent les sommets homologues aux milieux des côtés opposés étant des lignes homologues, doivent faire des angles égaux avec leurs côtés homologues; les angles bCM et bC′M′ sont donc égaux, et doivent conséquemment comprendre des arcs égaux entre leurs côtés: puis donc que ces arcs ont une extrémité commune b et vont dans le même sens, ils doivent se terminer à un même point m.

Corollaire. Il suit de là que, le triangle ACB étant seulement donné d'espèce, et inconnu, tant de grandeur que de situation par rapport à la corde ab, il est néanmoins possible de déterminer le point m où l'arc amb est rencontré par la droite CM menée de son sommet C au milieu M du côté opposé AB; il suffit en effet, pour cela, de déterminer le point m pour un autre triangle A′C′B′ arbitrairement construit semblable à celui-là, et ayant son angle C′, homologue à C, inscrit comme ce dernier à l'arc aC′b.

LEMME II. Soient deux cercles (fig. 12) ayant la droite ab pour corde commune; soit un troisième cercle ayant son centre O sur ab, et coupant les deux premiers en m et m' et la droite ab en p et q; soient menées mp et $m'p$, prolongées jusqu'à la ren-

contre des deux circonférences en C et C′; soit enfin menée CC′ coupant ab en γ; il s'agit de prouver que CC′ est perpendiculaire à ab.

Pour le démontrer, soit d'abord menée mm'; par les propriétés des cordes qui se coupent dans le cercle, on aura, à la fois,

$$\left.\begin{array}{l} pC\times pm=pa\times pb \\ pC'\times pm'=pa\times pb \end{array}\right\} \text{d'où } pC\times pm=pC'\times pm' \,;$$

donc les triangles CpC' et mpm' sont semblables, d'où il suit que l'angle C, égal à l'angle m', est mesuré par la moitié de l'arc pm; mais d'un autre côté, l'angle γpC, égal à mpq, doit être mesuré par la moitié de l'arc mq; donc, dans le triangle $C\gamma p$, la somme des deux angles C et p est mesuré par la moitié de la demi-circonférence pmq; cette somme vaut donc un angle droit; ce triangle est donc rectangle en γ et par conséquent CC′ est perpendiculaire à ab.

Corollaire. Si donc on proposait ce problème : » Deux points m » et m' étant donnés sur deux circonférences ayant une corde com- » mune ab; déterminer, sur cette corde ab, un point p par lequel » et par chacun des points m et m' menant les cordes mC et m'C′, » la droite CC′ soit perpendiculaire à ab? » Il faudrait, pour le résoudre, décrire un cercle dont le centre fût sur ab, et dont la circonférence passât par les points m et m'; chacune des intersections p et q de cette circonférence avec la droite ab pourrait être prise pour le point cherché.

PROBLÈME. Deux triangles étant donnés, déterminer sur quel plan il faut projeter orthogonalement le premier, pour que sa projection soit semblable à l'autre; construire de plus cette projection ainsi que l'inclinaison des deux plans; et déterminer, en outre, la situation du triangle et celle de sa projection par rapport à la commune section de ces deux plans?

Analise. Concevons que le problème soit déjà résolu. Soient ABC (fig. 13) le triangle à projeter, A′B′C′ sa projection, semblable

à un triangle donné, et ab l'intersection de leurs plans. Soient M et M′ les milieux de AB et A′B′ ; M′ sera la projection de M, et il est clair que CA, CM, CB prolongés iront concourir aux mêmes points a, p, b de ab, avec les prolongemens de C′A′, C′M′, C′B′. Soient enfin menées AA′, BB′, CC′, perpendiculaires au plan de projection, et $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ perpendiculaires à ab ; en menant $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$, ces droites seront aussi perpendiculaires à ab.

Concevons présentement que l'on fasse tourner le plan du triangle ACB aútour de la commune section ab, jusqu'à ce que ce plan soit devenu le même que celui du triangle A′C′B′, comme on le voit (fig. 14); dans ce mouvement, les points a, p, b, α, β, γ demeureront immobiles, et les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, ne cessant pas d'être perpendiculaires à ab, deviendront les prolongemens de $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$. Quant à la longueur de ab, comme tout plan parallèle à celui de A′B′C′ peut être pris, comme lui, pour le plan de projection, il s'ensuit que cette longueur est tout à fait arbitraire.

De cette analise découle naturellement la construction suivante.

Construction. Sur l'arbitraire ab (fig. 14) soient décrits, de différens côtés, des arcs capables de deux angles correspondans C et C′ tant du triangle à projeter que de sa projection. Sur les parties restantes des deux circonférences, soient déterminés (*Corollaire du Lemme* 1) les points m et m' où ces arcs seraient rencontrés par les droites joignant les sommets C, C′ aux milieux des côtés opposés. Soit enfin déterminé sur ab (*Corollaire du Lemme* 2) un point p par lequel et par les points m et m' menant aux deux cercles les cordes mC et m'C′, la droite CC′ soit perpendiculaire en γ sur ab ; alors C et C′ seront les sommets cherchés : formant donc sur l'angle C un triangle ACB égal au triangle à projeter et abaissant des points A, B, sur ab des perpendiculaires $A\alpha$, $B\beta$ prolongées jusqu'en A′ et B′ à leurs rencontres respectives avec $C'a$ et $C'b$, le triangle A′C′B′ sera la projection demandée. Quant à l'inclinaison des deux plans, elle sera l'angle aigu d'un triangle rectangle compris entre une hypothénuse égale à γC, et un côté de l'angle droit égal à γC′.

Comme le problème de la détermination du point p a deux solutions (fig. 12), savoir le point p et le point q, on pourrait croire que le problème proposé en a deux aussi ; mais, en exécutant l'opération sur le point q, on se convaincra facilement que le triangle rectangle qui doit donner l'inclinaison des deux plans ne peut être construit, de manière que le problème n'a jamais qu'une solution au plus.

Ce problème serait même impossible si la projection de l'un des angles du triangle à projeter devait être égale à cet angle même ; à moins cependant que les projections des deux autres ne dussent aussi leur être égales ; auquel cas les deux plans devraient être parallèles, et la situation du triangle à projeter indéterminée sur l'un de ces plans. (*)

Démonstrations du théorème de géométrie énoncé à la page 196 de ce volume ;

Par MM. Encontre, Ferriot, Legrand, Pouzin, Penjon, Lehault, Bret, Labrousse et Rochat.

ÉNONCÉ. *Dans tout quadrilatère, plan ou gauche, la somme des quarrés des deux diagonales est double de la somme des quarrés des deux droites qui joignent les milieux des côtés opposés.*

Les démonstrations de cette proposition données par MM. Encontre, professeur doyen de la faculté des sciences de l'académie de Montpellier ; Ferriot, professeur au lycée de Besançon ; Legrand, professeur de mathématiques à Saint-Brieux, et Pouzin, de Montpellier, se réduisent également à ce qui suit.

(*) Tout cela résulte aussi de ce qui est dit dans la note de la page 304.
(*Note des éditeurs.*)

On sait (*) qu'un quadrilatère, plan ou gauche; étant donné, si l'on en construit un autre dont les sommets soient les milieux des côtés du premier, ce dernier sera un parallélogramme dont les côtés opposés seront parallèles aux diagonales du quadrilatère donné, et en seront respectivement les moitiés.

Il est connu d'ailleurs (**) que, dans tout parallélogramme, la somme des quarrés des deux diagonales est égale à la somme des quarrés des quatre côtés.

Soit donc ABCD (fig. 15) un quadrilatère, plan ou gauche, et soient M, N, P, Q, les milieux respectifs de DA, CD, BC et AB; par la première proposition on aura

$$AC=2MN\,,\quad BD=2NP\,,$$
$$AC=2PQ\,,\quad BD=2MQ\,;$$

on aura donc, en quarrant, ajoutant et divisant par 2,

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2(\overline{MN}^2+\overline{NP}^2+\overline{PQ}^2+\overline{QM}^2)\,;$$

mais, par la seconde proposition, on a

$$2(\overline{MN}^2+\overline{NP}^2+\overline{PQ}^2+\overline{QM}^2)=2(\overline{MP}^2+\overline{NQ}^2)\,;$$

donc

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2(\overline{MP}^2+\overline{NQ}^2)\,.$$

M. Encontre remarque, à ce sujet, que tout parallèlogramme inscriptible au cercle est nécessairement un rectangle, puisque les deux diagonales se coupant en deux parties égales sont nécessairement des diamètres et qu'ainsi ses angles se trouvent inscrits au demi-cercle.

M. Ferriot observe que, si l'on conçoit une suite de parallélogrammes tels que les sommets de chacun soient les milieux des côtés du précédent, et qu'on désigne par 1 l'aire du premier, la somme de

(*) Voyez le tome 1.er des *Annales*, page 353.

(**) Voyez le corollaire de la proposition XIV du livre III de la Géométrie de M. Legendre.

leurs aires sera celle de la progression décroissante $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=2$; il remarque que la même proposition a encore lieu si la première figure, au lieu d'être un parallélogramme, est un quadrilatère quelconque.

M. Legrand remarque d'abord qu'en prenant le mot quadrilatère dans le sens le plus général, on peut, dans un quadrilatère plan ou gauche, considérer les deux diagonales comme deux côtés opposés, *et vice versâ* ; si donc R et S sont les milieux des diagonales BD et AC, (fig. 17) on devra avoir, en vertu du théorème démontré,

$$\overline{DB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{MP}^2+\overline{NQ}^2)\,,$$
$$\overline{AD}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{NQ}^2+\overline{RS}^2)\,,$$
$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=2(\overline{MP}^2+\overline{RS}^2)\,;$$

ce qui donne, en ajoutant,

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+\overline{BD}^2+\overline{CD}^2=4(\overline{MP}^2+\overline{NQ}^2+\overline{RS}^2)\,;$$

c'est-à-dire : *Dans tout quadrilatère, plan ou gauche, la somme de quarrés tant des côtés que des diagonales est quadruple de la somme des quarrés des droites qui joignent tant les milieux des côtés opposés que ceux des diagonales.*

Ou autrement : *Dans tout tétraèdre, la somme des quarrés des six arêtes est quadruple de la somme des quarrés des trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées.* (*)

Si de la somme des deux dernières équations on retranche la première, il vient, en transposant

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\overline{RS}^2\;;$$

c'est-à-dire : *Dans tout quadrilatère, plan ou gauche, la somme des quarrés des quatre côtés est égale à la somme des quarrés des*

(*) Voyez la page 358 du tome 1.er des *Annales*.

deux

deux diagonales, plus le quadruple du quarré de la droite qui joint les milieux de ces diagonales. (*)

Supposant ensuite que le quadrilatère est plan, formant le quadrilatère complet, et appliquant le théorème à chacun des quadrilatères simples qui le composent, M. Legrand parvient aux deux théorèmes que voici :

1.° *Dans tout quadrilatère complet, la somme des quarrés des trois diagonales est égale à la somme des quarrés des six droites qui joignent les milieux des côtés opposés, dans les trois quadrilatères simples qui le composent.*

2.° *Dans tout quadrilatère complet, la somme des quarrés des douze côtés des trois quadrilatères simples qui le composent est égale au double de la somme des quarrés des trois diagonales, plus le quadruple de la somme des quarrés des trois distances des milieux de ces diagonales, pris deux à deux.*

M. Penjon, professeur au lycée d'Angers, a démontré la proposition comme il suit :

Tout étant d'ailleurs dans la figure 16 comme dans la figure 15, soient menées NA et NB ; par un théorème connu (**) les triangles ANB, CAD, DBC donneront

$$2(\overline{NA}^2+\overline{NB}^2)=\overline{AB}^2+4\overline{NQ}^2\ ,$$
$$2(\overline{AC}^2+\overline{AD}^2)=\overline{CD}^2+4\overline{NA}^2\ ,$$
$$2(\overline{BD}^2+\overline{BC}^2)=\overline{CD}^2+4\overline{NB}^2\ .$$

Ajoutant les deux dernières équations au double de la première, il viendra, en réduisant, transposant et divisant par 2

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=4\overline{NQ}^2+(\overline{AB}^2+\overline{CD}^2)-(\overline{AD}^2+\overline{BC}^2)\ ;$$

c'est-à-dire : *Dans tout quadrilatère, plan ou gauche, la somme des quarrés des deux diagonales est égale à quatre fois le quarré*

(*) Voyez le tome 1.er des *Annales*, page 358.

(**) Voyez la même page.

de la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés quelconques, plus la somme des quarrés de ces mêmes côtés, moins la somme des quarrés des deux autres; proposition qui rentre au surplus dans l'une de celles de M. Legrand.

On aura donc pareillement

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=4\overline{MP}^2+(\overline{AD}^2+\overline{BC}^2)-(\overline{AB}^2+\overline{CD}^2)\,;$$

prenant la demi-différence de ces équations, il viendra, en transposant,

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+2\overline{NQ}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2+2\overline{MP}^2\;;$$

c'est-à-dire : *Dans tout quadrilatère, plan ou gauche, la somme des quarrés de deux côtés opposés, plus le double du quarré de la droite qui joint leurs milieux, est égale à la somme des quarrés des deux autres côtés, plus le double du quarré de la droite qui joint les milieux de ces derniers.*

Ou autrement : *Dans tout tétraèdre, la somme des quarrés de deux arêtes opposées quelconques, plus le double du quarré de la droite qui joint leurs milieux, est une quantité constante.* (*)

Si au contraire, on prend la demi-somme de ces équations, il viendra

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2(\overline{MP}^2+\overline{NQ}^2)\,,$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

Voici la démonstration de M. Lehault, élève du lycée d'Angers.

Soient R, S (fig. 17) les milieux respectifs des deux diagonales BD et AC, et soient menées les droites MR, MS, NR, NS, PR, PS, QR, QS; on sait (**) que ces huit droites, moitiés des côtés du quadrilatère ABCD sont les côtés de deux parallélogrammes dont RS est une diagonale commune; on aura donc, par le théorème déjà rappelé,

(*) Voyez le tome 1.er des *Annales*, page 360.

(**) Voyez le tome 1.er des *Annales*, pages 313 et 353.

$$\overline{MR}^2+\overline{RP}^2+\overline{PS}^2+\overline{SM}^2 \text{ ou } 2\overline{MR}^2+2\overline{MS}^2$$

$$\text{ou } 2(\tfrac{1}{4}\overline{AB}^2+\tfrac{1}{4}\overline{CD}^2)=\overline{MP}^2+\overline{RS}^2 \ ;$$

ou

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=2(\overline{MP}^2+\overline{RS}^2) \ ;$$

on aura pareillement

$$\overline{AD}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{NQ}^2+\overline{RS}^2) \ .$$

En prenant la différence de ces équations, on retomberait sur l'un des théorèmes de M. Penjon; mais si l'on en prend au contraire la somme, il viendra

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=2(\overline{MP}^2+\overline{NQ}^2)+4\overline{RS}^2 \ ;$$

c'est-à-dire : *Dans tout quadrilatère, plan ou gauche, la somme des quarrés des quatre côtés est égale au double de la somme des quarrés des deux droites qui joignent les milieux des côtés opposés, augmenté du quadruple du quarré de celle qui joint les milieux des deux diagonales.*

Or, on a, par un théorème connu, (*)

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\overline{RS}^2 \ ;$$

donc, en retranchant et transposant,

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2(\overline{MP}^2+\overline{NQ}^2) \ ;$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

MM. Bret, professeur à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble, Labrousse, professeur de mathématiques à Montélimart, et Rochat, professeur de navigation à St-Brieux, ont démontré le théorème par l'analise. Nous indiquerons seulement la démonstration de M. Bret, qui nous a paru remarquable par sa généralité et son élégante brièveté.

(*) Voyez le tome 1.er des *Annales*, pages 313 et 353.

Soient A, B, C, D,.... tant de points qu'on voudra, disposés d'une manière quelconque dans l'espace et rapportés à trois axes rectangulaires quelconques ; soient a, a', a'' les coordonnées du point A ; b, b', b'' celles du point B ; et ainsi des autres. Soit désigné par M_{ab} le milieu de la droite qui joint les points A et B, et soient adoptées des notations analogues pour les milieux des droites qui joignent les autres points deux à deux ; les coordonnées du point M_{ab} seront, comme l'on sait, $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a'+b'}{2}$, $\frac{a''+b''}{2}$; celles du point M_{cd} seront $\frac{c+d}{2}$, $\frac{c'+d'}{2}$, $\frac{c''+d''}{2}$, et il en sera de même pour les autres.

Soient enfin adoptées, pour abréger, les notations que voici :

$$(a-b)^2+(a'-b')^2+(a''-b'')^2=S.(a-b)^2$$

$$\left(\frac{a+b}{2}-\frac{c+d}{2}\right)^2+\left(\frac{a'+b'}{2}-\frac{c'+d'}{2}\right)^2+\left(\frac{a''+b''}{2}-\frac{c''+d''}{2}\right)^2=S.\left(\frac{a+b}{2}-\frac{c+d}{2}\right)^2 ;$$

en observant que, quelles que soient deux quantités p, q, on a l'équation identique

$$p^2+q^2=2\left\{\left(\frac{p+q}{2}\right)^2+\left(\frac{p-q}{2}\right)^2\right\},$$

on aura

$$S.(a-b)^2+S.(c-d)^2=2\left\{S.\left(\frac{a+c}{2}-\frac{b+d}{2}\right)^2+S.\left(\frac{a+d}{2}-\frac{b+c}{2}\right)^2\right\} ;$$

c'est-à-dire,

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=2\left\{\overline{M_{ac}M_{bd}}^2+\overline{M_{ad}M_{bc}}^2\right\} ;$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

Loin que la proposition ainsi démontrée en présuppose aucune autre, on peut au contraire en déduire facilement, comme corollaires, toutes celles sur lesquelles on s'est appuyé dans les démonstrations précédentes, et un grand nombre d'autres. M. Bret se contente d'en donner les exemples qui suivent.

On peut d'abord supposer que le quadrilatère est un parallélo-

gramme ; alors la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés devient égale à chacun des deux autres côtés ; le théorème devient donc alors la propriété du parallélogramme sur laquelle se sont appuyés MM. Encontre, Ferriot, Legrand et Pouzin.

Dans la formule

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=2\left\{\overline{M_{ac}M_{bd}}^2+\overline{M_{ad}M_{bc}}^2\right\},$$

on peut permuter à volonté les lettres entre elles ; on peut donc écrire

$$\overline{BC}^2+\overline{AD}^2=2\left\{\overline{M_{ab}M_{cd}}^2+\overline{M_{ac}M_{bd}}^2\right\},$$

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2\left\{\overline{M_{ab}M_{cd}}^2+\overline{M_{ad}M_{bc}}^2\right\}.$$

Si, laissant la dernière de ces trois équations, on ajoute seulement entre elles les deux premières, il viendra

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=2\left\{\overline{M_{ab}M_{cd}}^2+\overline{M_{ad}M_{bc}}^2\right\}+4\,\overline{M_{ac}M_{bd}}^2\ ;$$

ce qui est un théorème de M. Penjon; mais, en vertu de la propriété du parallélogramme qui vient d'être démontré, on a

$$2\left(\overline{M_{ab}M_{cd}}^2+\overline{M_{ad}M_{bc}}^2\right)=2\left(\overline{M_{ab}M_{ad}}^2+\overline{M_{ad}M_{cd}}^2+\overline{M_{cd}M_{bc}}^2+\overline{M_{bc}M_{ab}}^2\right)$$
$$=4\,\overline{M_{ab}M_{ad}}^2+4\overline{M_{ad}M_{cd}}^2=\overline{BD}^2+\overline{AC}^2\ ;$$

donc

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{BD}^2+\overline{AC}^2+4\overline{M_{bd}M_{ac}}^2\ ;$$

ce qui est le théorème d'Euler sur lequel s'est appuyé M. Lehault.

En prenant la somme des trois équations on obtient

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+\overline{BD}^2+\overline{CD}^2=4\left\{\overline{M_{ab}M_{cd}}^2+\overline{M_{ac}M_{bd}}^2+\overline{M_{ad}M_{bc}}^2\right\};$$

propriété du tétraèdre démontré par M. Legrand.

Si, dans cette dernière formule, on suppose que le point D se confond avec le point C, on aura

$$AD=AC,\ BD=BC,\ CD=0,\ M_{cd}=C,\ M_{bd}=M_{bc},\ M_{ad}=M_{ac}\ ;$$

elle deviendra donc

$$\overline{AB}^2+2\left(\overline{AC}^2+\overline{BC}^2\right)=4\,\overline{CM_{ab}}^2+8\overline{M_{ac}M_{bc}}^2\;;$$

mais, par la propriété des parallèles, on a

$$2M_{ac}M_{bc}=AB\,,$$

d'où

$$8\overline{M_{ac}M_{bc}}^2=2\overline{AB}^2\,;$$

substituant donc, il viendra, en réduisant,

$$2\left(\overline{AC}^2+\overline{BC}^2\right)=\overline{AB}^2+4\overline{CM_{ab}}^2\,;$$

c'est la propriété du triangle, sur laquelle s'est appuyé M. Penjon.

M. Bret termine en observant que cette propriété du triangle donne lieu à un théorème assez remarquable que voici :

La somme des quarrés des distances d'un point fixe aux deux extrémités d'un même diamètre quelconque d'une sphère est une quantité constante, égale au double du quarré du rayon de la sphère, augmenté du quadruple du quarré de la distance du point fixe au centre de cette sphère.

La même propriété a évidemment lieu pour le cercle, soit que le point fixe se trouve sur son plan ou qu'il soit hors de ce plan.

Solutions du problème de géométrie énoncé à la page 224 de ce volume ;



ÉNONCÉ. *A un polygone donné circonscrire un polygone de même nom, dont les angles soient respectivement égaux à des angles donnés, et dont l'aire ou le contour soit donné ?*

Première solution ;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

Comme le procédé que je vais développer, pour la solution de chacun des deux problèmes, est exactement le même, quel que soit le nombre des côtés (plus grand que trois, lequel cas donne lieu à une construction très-simple) du polygone proposé ; et que les opérations diffèrent seulement par leur longueur, et par le nombre des termes qui composent l'équation à laquelle ce procédé conduit ; je crois devoir me borner, par raison de brièveté, à le développer seulement pour un quadrilatère.

Soit ABCD (fig. 18) un quadrilatère proposé. On demande de lui circonscrire un quadrilatère *abcd* dont les côtés *ab*, *bc*, *cd*, *da*, passent respectivement par les sommets A, B, C, D, du premier quadrilatère ; en connaissant les angles *a*, *b*, *c*, *d*, et le contour ou la surface du quadrilatère *abcd*.

Que les angles du polygone donné soient désignés par A, B, C, D, respectivement. Que les angles donnés du polygone cherché soient désignés par *a*, *b*, *c*, *d*. Que l'un des deux angles que forment, avec un côté du polygone cherché, les deux côtés du polygone donné dont le point de concours est sur celui-là ; que l'angle *a*AB, par exemple, soit désigné par *x* ; on peut exprimer dans cet angle et dans les angles des deux polygones, les inclinaisons mutuelles des autres côtés correspondans de ces deux polygones.

On trouve, en effet, successivement, l'angle droit étant pris pour unité,

$aAB=x$, $\quad aBA=2-(a+x)$,

$bBC=a-B+x$, $\quad bCB=2-(a+b-B+x)$,

$cCD=a-B+b-C+x$, $\quad cDC=2-(a+b+c-B-C+x)$,

$dDA=a-B+b-C+c-D+x$, $\quad dAD=2-(a+b+c+d-B-C-D+x)$;

d'où résulte

$$Aa=AB.\frac{\text{Sin.}(a+x)}{\text{Sin.}a}, \qquad aB=AB.\frac{\text{Sin.}x}{\text{Sin.}a},$$

$$Bb=BC.\frac{\text{Sin.}(a+b-B+x)}{\text{Sin.}b}, \qquad bC=BC.\frac{\text{Sin.}(a+b+x)}{\text{Sin.}b},$$

$$Cc=CD.\frac{\text{Sin.}(a+b+c-B-C+x)}{\text{Sin.}c}, \qquad cD=CD.\frac{\text{Sin.}(a+b-B-C+x)}{\text{Sin.}c},$$

$$Dd=DA.\frac{\text{Sin.}(a+b+c+d-B-C-D+x)}{\text{Sin.}d}, \quad dA=DA.\frac{\text{Sin.}(a+b+c-B-C-D+x)}{\text{Sin.}d}.$$

PROBLÈME I. On donne le contour du polygone demandé.

D'après ce qui précède, on a

$$Aa+aB=AB.\frac{\text{Sin.}x+\text{Sin.}(a+x)}{\text{Sin.}a}$$

$$Bb+bC=BC.\frac{\text{Sin.}(a-B+x)+\text{Sin.}(a+b-B+x)}{\text{Sin.}b}$$

$$Cc+cD=CD.\frac{\text{Sin.}(a+b-B-C+x)+\text{Sin.}(a+b+c-B-C+x)}{\text{Sin.}c}$$

$$Dd+dA=DA.\frac{\text{Sin.}(a+b+c-B-C-D+x)+\text{Sin}(a+b+c+d-B-C-D+x)}{\text{Sin.}d};$$

prenant la somme de ces équations, en remarquant qu'en général

$$\frac{\text{Sin.}z+\text{Sin.}(k+z)}{\text{Sin.}k}=\text{Cosec.}\tfrac{1}{2}k.\text{Sin.}(\tfrac{1}{2}k+z),$$

il viendra

$$ab+bc+cd+da=\begin{cases}AB.\text{Cosec.}\tfrac{1}{2}a.\text{Sin.}(\tfrac{1}{2}a+x),\\ +BC.\text{Cosec.}\tfrac{1}{2}b.\text{Sin.}(a+\tfrac{1}{2}b-B+x);\\ +CD.\text{Cosec.}\tfrac{1}{2}c.\text{Sin.}(a+b+\tfrac{1}{2}c-B-C+x),\\ +DA.\text{Cosec.}\tfrac{1}{2}d.\text{Sin.}(a+b+c+\tfrac{1}{2}d-B-C-D+x).\end{cases}$$

De là découle la construction suivante, fondée sur les propriétés du centre des moyennes distances :

Sur une droite SE (fig. 19), et en un de ses points S, soient faits les angles ESA, ESb, ESc, ESd, respectivement égaux aux angles

$\tfrac{1}{2}a$,

$\frac{1}{2}a$, $a+\frac{1}{2}b$, $a+b+\frac{1}{2}c$, $a+b+c+\frac{1}{2}d$, en tournant toujours dans le même sens.

Sur les droites Sb, Sc, Sd, soient faits les angles bSB, cSC, dSD respectivement égaux aux angles B, B+C, B+C+D, en tournant toujours dans un même sens, opposé au premier.

Sur les droites SA, SB, SC, SD, soient prises des longueurs SA, SB, SC, SD, respectivement égales à AB.Cosec.$\frac{1}{2}a$, BC.Cosec.$\frac{1}{2}b$, CD.Cosec.$\frac{1}{2}c$, DA.Cosec $\frac{1}{2}d$.

Soit cherché le centre Z des moyennes distances des extrémités A, B, C, D de ces droites. Du point Z comme centre, avec un rayon égal au quart du contour donné, soit décrit un cercle. Du point S soit menée (s'il y a lieu) une tangente à ce cercle. L'angle formé par cette tangente et par la droite SE est l'angle cherché x.

Remarque. Le contour donné ne doit pas être plus grand que le quadruple de SZ. Lorsque le quart du contour donné est plus petit que SZ, le problème proposé a deux solutions. Pour que ce problème soit déterminé, le centre Z doit être différent du point S.

PROBLÈME II. On donne la surface du polygone demandé.

D'après les formules ci-dessus et l'expression connue de la surface d'un triangle dans deux de ses côtés et l'angle qu'ils comprennent, on a

$$4\text{A}a\text{B}=2\text{AB}^2.\frac{\text{Sin}.x.\text{Sin}.(a+x)}{\text{Sin}.a},$$

$$4\text{B}b\text{C}=2\text{BC}^2.\frac{\text{Sin}.(a-\text{B}+x)\text{Sin}.(a+b-\text{B}+x)}{\text{Sin}.b},$$

$$4\text{C}c\text{D}=2\text{CD}^2.\frac{\text{Sin}.(a+b-\text{B}-\text{C}+x)\text{Sin}.(a+b+c-\text{B}-\text{C}+x)}{\text{Sin}.c},$$

$$4\text{D}d\text{A}=2\text{DA}^2.\frac{\text{Sin}.(a+b+c-\text{B}-\text{C}-\text{D}+x)\text{Sin}.(a+b+c+d-\text{B}-\text{C}-\text{D}+x)}{\text{Sin}.d}.$$

En ajoutant ces équations, membre à membre, ajoutant aux deux membres de l'équation résultante le quadruple de la surface du polygone ABCD, et remarquant qu'en général

$$\frac{\text{Sin}.z\text{Sin}.(k+z)}{\text{Sin}.k}=\frac{\text{Cos}.k-\text{Cos}.2(\frac{1}{2}k+z)}{2\text{Sin}.k}=\frac{1}{2}\text{Cot}.k-\frac{\text{Cos}.2(\frac{1}{2}k+z)}{2\text{Sin}.k},$$

il viendra

$$4abcd=\begin{cases} 4ABCD+AB^2.\text{Cot}.a+BC^2.\text{Cot}.b+CD^2.\text{Cot}.c+DA^2.\text{Cot}.d \\ -AB^2.\text{Cosec}.a.\text{Cos}.2(\tfrac{1}{2}a+x) \\ -BC^2.\text{Cosec}.b.\text{Cos}.2(a+\tfrac{1}{2}b-B+x) \\ -CD^2.\text{Cosec}.c.\text{Cos}.2(a+b+\tfrac{1}{2}c-B-C+x) \\ -DA^2.\text{Cosec}.d.\text{Cos}.2(a+b+c+\tfrac{1}{2}d-B-C-D+x). \end{cases}$$

De là découle la construction suivante, fondée aussi sur les propriétés du centre des moyennes distances.

Sur une droite SE (fig. 20), et en un de ses points S, soient faits les angles ESA, ESb, ESc, ESd, respectivement égaux aux angles $2\tfrac{1}{2}a$, $2(a+\tfrac{1}{2}b)$, $2(a+b+\tfrac{1}{2}c)$, $2(a+b+c+\tfrac{1}{2}d)$, en tournant toujours dans un même sens.

Sur les droites Sb, Sc, Sd, soient faits les angles bSB, cSC, dSD, respectivement égaux aux angles 2B, 2(B+C), 2(B+C+D), en tournant toujours dans un même sens, contraire au premier.

Du quadruple de l'excès de la surface du polygone cherché sur celle du polygone donné soit retranchée la somme $AB^2.\text{Cot}.a+BC^2.\text{Cot}.b+CD^2.\text{Cot}.c+DA^2.\text{Cot}.d$, et soit le reste égal au rectangle de deux droites l et m.

Que les carrés des côtés donnés AB, BC, CD, DA, soient convertis en rectangles ayant, pour un de leurs côtés, une des deux droites, telle que m.

Que les autres côtés de ces rectangles soient α, β, γ, δ, respectivement.

Sur les droites SA, SB, SC, SD, soient portées, depuis le point S, des longueurs respectivement égales à $\alpha\text{Cosec}.a$, $\beta\text{Cosec}.b$, $\gamma\text{Cosec}.c$, $\delta\text{Cosec}.d$; que ces longueurs soient SA, SB, SC, SD.

Soit cherché le centre Z des moyennes distances des points A, B, C, D; et du point Z comme centre, avec un rayon égal à $\tfrac{1}{4}l$, soit décrite une circonférence de cercle.

Du point S soit menée, (s'il y a lieu) une tangente à cette circonférence; et du même point S soit menée à cette tangente une per-

pendiculaire. L'angle formé par cette perpendiculaire et par la droite SA sera le double de l'angle cherché x.

Remarque. On tire de cette construction, relativement à ce second problème, des conséquences analogues à celles qu'on a déduites de la construction du premier.

Deuxième solution ;

Par M. Pilatte, professeur de mathématiques spéciales au lycée d'Angers.

Par un calcul tout semblable à celui de M. Lhuilier, mais moins développé, attendu qu'il n'a pour objet que de faire connaître la forme des résultats qu'on doit en déduire ; et en prenant d'ailleurs la même inconnue ; M. Pilatte prouve que, quel que soit d'ailleurs le nombre des côtés des deux polygones, en désignant par c le contour du polygone à construire et par e l'excès de son aire sur celle du polygone donné, on aura, savoir : pour le premier problème

$$p\mathrm{Sin}.x+q\mathrm{Cos}.x=c\ , \qquad \text{(I)}$$

et pour le second

$$p\mathrm{Sin}.2x+q\mathrm{Cos}.2x+r=e\ , \qquad \text{(II)}$$

p, q, r étant des constantes, fonctions des données du problème, et qui peuvent être déterminées d'une multitude de manières différentes.

Pour les déterminer de la manière la plus simple, M. Pilatte suppose, pour le premier problème, que l'on a circonscrit au polygone donné deux polygones équiangles avec le polygone cherché ; mais dans lesquels on prend, savoir, pour le premier $x=0$ et pour le second $x=100°$; désignant par c' et c'' respectivement les contours de ces deux polygones, il obtient

$$q=c' \qquad p=c''$$

ce qui réduit l'équation (I) à celle-ci.

$$c''\mathrm{Sin}.x+c'\mathrm{Cos}.x=c. \qquad \text{(A)}$$

qui, combinée avec $\text{Sin.}^2x+\text{Cos.}^2x=1$, donnera les deux valeurs soit de $\text{Sin.}x$ soit de $\text{Cos.}x$.

Pour le second problème, M. Pilatte suppose que l'on a circonscrit au polygone donné trois polygones équiangles avec le polygone cherché (*); mais dans lesquels on prend successivement $x=0$, $x=50°$, $x=100°$; désignant respectivement par e', e'', e''', l'excès de l'aire de chacun de ces polygones sur l'aire du polygone donné, il obtient

$$q+r=e'\,,\quad p+r=e''\,,\quad r-q=e'''\,,$$

d'où $$p=e''-\tfrac{1}{2}(e'+e''')\,,\quad q=\tfrac{1}{2}(e'-e''')\,,\quad r=\tfrac{1}{2}(e'+e''')\,;$$

en conséquence, l'équation (II) devient

$$(2e''-e'-e''')\text{Sin.}2x+(e'-e''')\text{Cos.}2x=2e-e'-e'''. \qquad \text{(B)}$$

qui combinée avec $\text{Sin.}^2 2x+\text{Cos.}^2 2x=1$ donnera les deux valeurs soit de $\text{Sin.}2x$ soit de $\text{Cos.}2x$, d'où on conclura ensuite celles de x.

On peut consulter, au surplus, sur la résolution des équations (A) et (B), la page 85 de ce volume.

Troisième solution;

Par M. Rochat, professeur de navigation à St-Brieux.

La marche de la solution de M. Rochat ne diffère en rien de celle de MM. Pilatte et Lhuilier; elle le conduit aux deux mêmes équations en x qu'il ne construit pas.

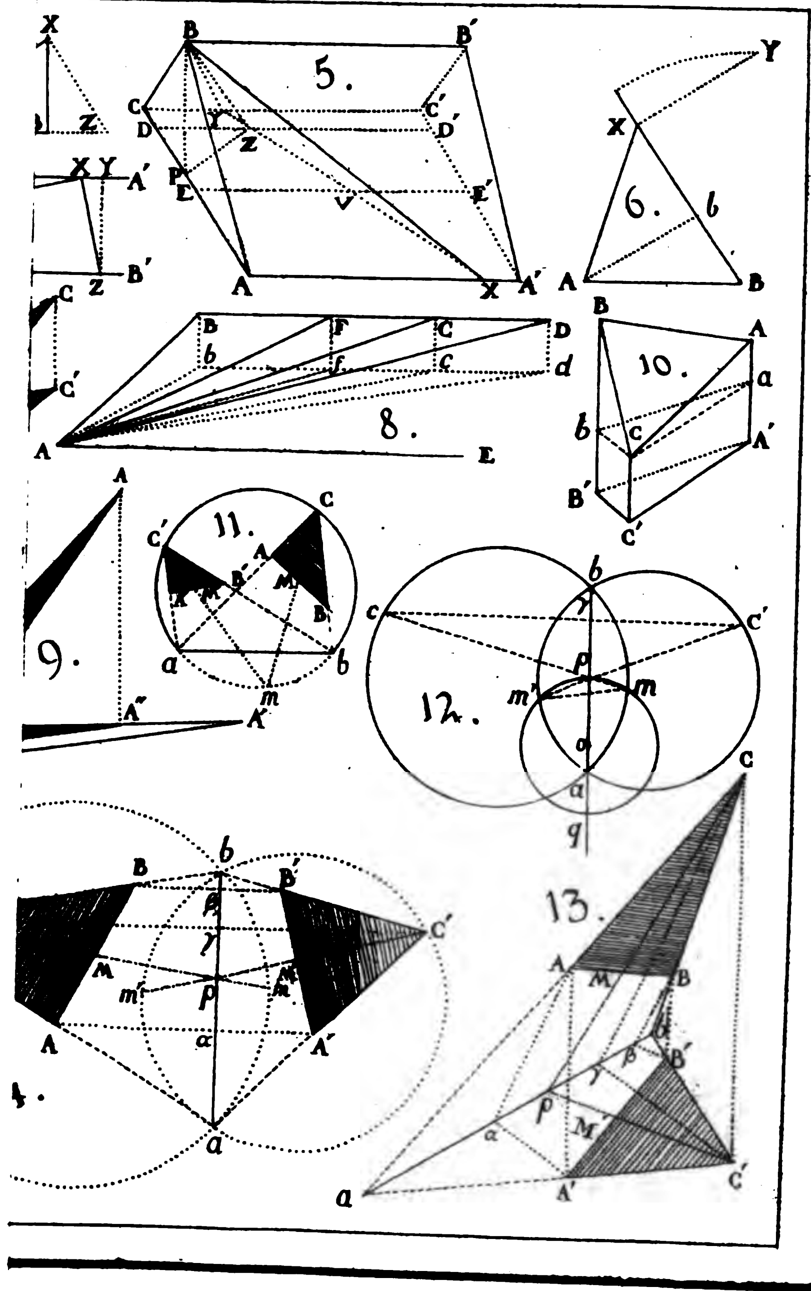
QUESTION PROPOSÉE.

Problème de probabilité.

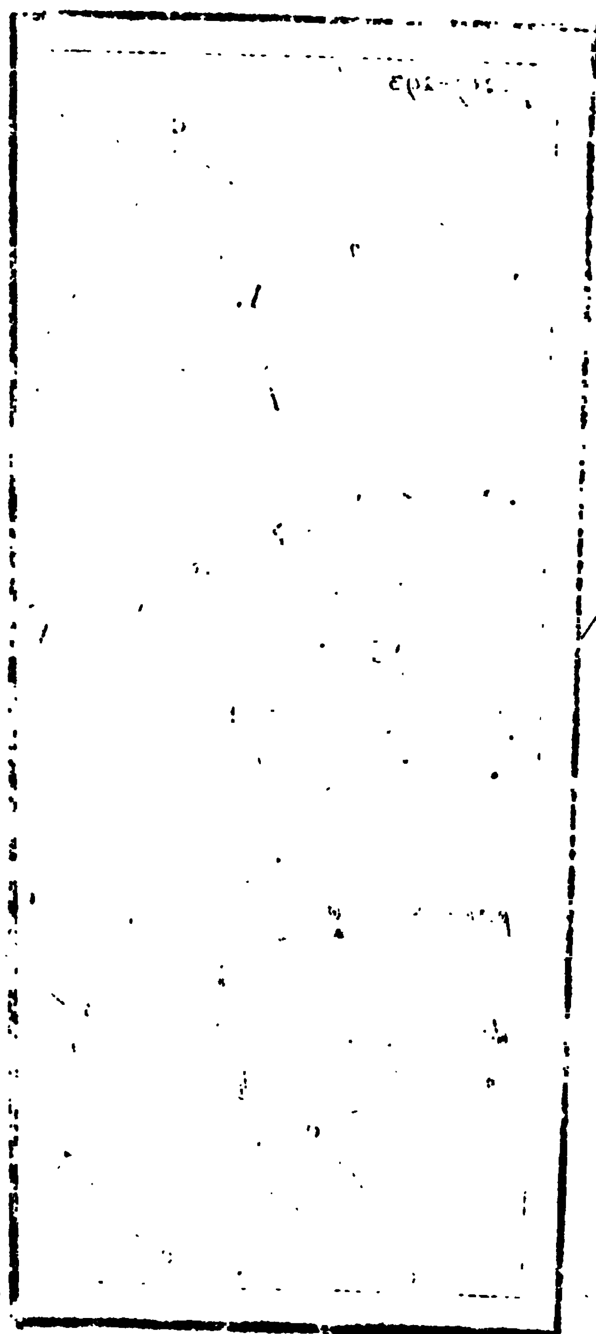
Une loterie étant composée de n numéros 1, 2, $3 \ldots n$, dont il en sort t à chaque tirage; quelle probabilité y a-t-il que, parmi les t numéros d'un tirage, il ne se trouvera pas deux nombres consécutifs de la suite naturelle? (**)

(*) Il est entendu qu'ici le mot *circonscrit* doit être pris dans le sens le plus général.

(**) On pourrait aussi demander quelle est la probabilité qu'un tirage ne présentera pas deux nombres consécutifs de la suite naturelle se succédant consécutivement dans l'ordre de sortie.



J.D.G. fecit.



ANALISE TRANSCENDANTE.

Méthode de différentiation, indépendante du développement des fonctions en séries.

Par feu Français, professeur aux écoles d'artillerie. (*)

Toutes les méthodes de différentiation, connues jusqu'à présent, supposent le développement des fonctions en séries ; et la chose paraît même, en quelque sorte, inévitable, puisque les différentielles d'une fonction ne sont autre chose que les coefficiens des termes successifs du développement de ce que devient cette fonction, lorsque la variable reçoit un accroissement arbitraire. Il peut donc paraître assez intéressant de déterminer les différentielles d'une fonction, sans recourir à ce développement ; c'est l'objet de la méthode que je vais exposer. Elle ne suppose connues que la différentielle de la somme $x+y$, et celle du produit xy, et repose sur les deux lemmes suivans :

LEMME I. x et y étant deux variables entièrement indépendantes, et P, Q, R, S étant des fonctions quelconques de x et y ; si l'on a l'équation

$$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=R\mathrm{d}x+S\mathrm{d}y\ ,$$

(*) Ce mémoire a été communiqué aux Rédacteurs des *Annales* par M. J. Français, professeur à l'école de l'artillerie et du génie, frère de l'Auteur.

Le même géomètre a aussi adressé aux Rédacteurs des *Annales* une démonstration du théorème énoncé à la page 96 de ce volume, qui leur est malheureusement parvenue trop tard pour qu'il ait pu en être fait mention à temps. Elle est, au surplus, semblable en tout à celle qui a été donnée par M. Tédenat à la page 182. (*Note des éditeurs*).

on en pourra conclure ces deux-ci

$$P=R \quad , \qquad Q=S.$$

Démonstration. Si l'équation $(P-R)\mathrm{d}x+(Q-S)\mathrm{d}y=0$ n'était point identique, ce serait une équation différentielle en vertu de laquelle y se trouverait, contrairement à l'hypothèse, une certaine fonction de x; on a donc nécessairement $P-R=0$ et $Q-S=0$; donc, etc.

LEMME II. X et Y étant deux fonctions composées de la même manière, la première en x et la seconde en y, variables indépendantes; si l'on a $X=Y$, on en pourra conclure $X=$constante.

Démonstration. D'après l'hypothèse, la fonction X doit devenir la fonction Y, si l'on y met y au lieu de x; mais, à cause de $X=Y$, la fonction X ne doit pas changer de valeur, par l'effet de cette substitution; donc, puisque y, indépendant de x, peut représenter des valeurs quelconques de x, la fonction X est tellement constituée, qu'elle conserve la même valeur, quelle que soit d'ailleurs la variation de x; propriété qui caractérise les constantes; donc, etc.

Cela posé, soit 1.° à différentier x^m?

Soient x et y deux variables absolument indépendantes; on aura

$$(xy)^m=x^my^m \,. \qquad (1)$$

Désignons la différentielle inconnue de x^m par $\varphi(x)\mathrm{d}x$; nous aurons, en différentiant l'équation, (1)

$$\varphi(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=y^m\varphi(x)\mathrm{d}x+x^m\varphi(y)\mathrm{d}y \;;$$

d'où nous tirerons, par le *Lemme I*,

$$y\varphi(xy)=y^m\varphi(x) \;, \quad x\varphi(xy)=x^m\varphi(y) \;;$$

ce qui donne, par l'élimination de $\varphi(xy)$ et la suppression des facteurs communs,

$$y^{m-1}\varphi(x)=x^{m-1}\varphi(y) \;, \quad \text{ou} \quad \frac{\varphi(x)}{x^{m-1}}=\frac{\varphi(y)}{y^{m-1}} \;;$$

on a donc, par le *Lemme II*, $\frac{\varphi(x)}{x^{m-1}}=C$; donc $\varphi(x)=Cx^{m-1}$, et par conséquent,

$$d.x^m=Cx^{m-1}.dx.$$

2.° Soit à différentier a^x ?

En supposant encore y quelconque et indépendante de x, on aura

$$a^{x+y}=a^x.a^y. \qquad (2)$$

Soit $\varphi(x)dx$ la différentielle de a^x; il viendra, en différentiant l'équation (2),

$$\varphi(x+y)(dx+dy)=a^y\varphi(x)dx+a^x\varphi(y)dy ;$$

d'où nous tirerons, par le *Lemme I*,

$$\varphi(x+y)=a^y\varphi(x) , \quad \varphi(x+y)=a^x\varphi(y)$$

donc

$$a^y\varphi(x)=a^x\varphi(y) , \quad \text{ou} \quad \frac{\varphi(x)}{a^x}=\frac{\varphi(y)}{a^y} ;$$

et, par le *Lemme II*, $\frac{\varphi(x)}{a^x}=C$; donc $\varphi(x)=Ca^x$, et par conséquent

$$d.a^x=Ca^x dx.$$

3.° Soit à différentier Log.x, pour un système quelconque ?

On aura par la définition de la fonction proposée,

$$\text{Log.}(xy)=\text{Log.}x+\text{Log.}y. \qquad (3)$$

Soit $\varphi(x)dx$ la différentielle de Log.x ; il viendra en différentiant l'équation (3)

$$\varphi(xy)(ydx+xdy)=\varphi(x)dx+\varphi(y)dy ;$$

donc (*Lemme I*)

$$y\varphi(xy)=\varphi(x) , \quad x\varphi(xy)=\varphi(y) ,$$

d'où

$$x\varphi(x)=y\varphi(y) ;$$

donc (*Lemme II*) $x\varphi(x)=C$, ou $\varphi(x)=\frac{C}{x}$, et par conséquent

$$\text{d.Log.}x = \frac{C\text{d}x}{x}.$$

4.° Soit à différentier Sin.x ?

Soit d.Sin.$x = \varphi(x)\text{d}x$; en différentiant l'équation $\text{Sin.}^2x + \text{Cos.}^2x = 1$; il vient $\text{Sin.}x.\varphi(x).\text{d}x + \text{Cos.}x.\text{d.Cos.}x = 0$; d'où $\text{d.Cos.}x = -\frac{\text{Sin.}x}{\text{Cos.}x}\varphi(x)\text{d}x$.

D'un autre côté on a, par la définition de la fonction proposée,

$$\text{Sin.}(x+y) = \text{Sin.}x\text{Cos.}y + \text{Cos.}x\text{Sin.}y \; ; \qquad (4)$$

d'où on conclura, par la différentiation,

$$\varphi(x+y)(\text{d}x+\text{d}y) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cos.}y.\varphi(x)\text{d}x - \text{Sin.}x.\frac{\text{Sin.}y}{\text{Cos.}y}\varphi(y)\text{d}y \\ +\text{Cos.}x.\varphi(y)\text{d}y - \text{Sin.}y.\frac{\text{Sin.}x}{\text{Cos.}x}\varphi(x)\text{d}x \end{array} \right.$$

ou

$$\varphi(x+y)(\text{d}x+\text{d}y) = \frac{\text{Cos.}(x+y)}{\text{Cos.}x}\varphi(x)\text{d}x + \frac{\text{Cos.}(x+y)}{\text{Cos.}y}\varphi(y)\text{d}y \; ;$$

donc (*Lemme I*)

$$\varphi(x+y) = \frac{\text{Cos.}(x+y)}{\text{Cos.}x}\varphi(x) = \frac{\text{Cos.}(x+y)}{\text{Cos.}y}\varphi(y) \; ,$$

ou

$$\frac{\varphi(x)}{\text{Cos.}x} = \frac{\varphi(y)}{\text{Cos.}y} \; ;$$

donc (*Lemme II*) $\frac{\varphi(x)}{\text{Cos.}x} = C$; donc $\varphi(x) = C\text{d}x\text{Cos.}x$; donc enfin

$$\text{d.Sin.}x = C\text{d}x.\text{Cos.}x \; ;$$

et, puisqu'on a

$$\text{d.Cos.}x = -\frac{\text{Sin.}x}{\text{Cos}x}\varphi(x)\text{d}x \; ,$$

il viendra en outre

$$\text{d.Cos.}x = -C\text{d}x\text{Sin.}x.$$

Il reste maintenant à déterminer les constantes qui entrent dans ces diverses différentielles.

1.° Dans l'équation $d.x^m = Cx^{m-1}dx$, la constante C ne peut être qu'une fonction de m ; en la désignant par $f(m)$, elle se changera en $f(n)$ pour la différentielle de x^n, et en $f(m+n)$ pour celle de x^{m+n} ; or on a

$$x^{m+n} = x^m . x^n ,$$

d'où on conclura, par la différentiation,

$$f(m+n)x^{m+n-1}dx = f(m)x^{m+n-1}dx + f(n)x^{m+n-1}dx ;$$

c'est-à-dire,

$$f(m+n) = f(m) + f(n). \qquad (5)$$

Soit $d.f(m) = \psi(m)dm$; en différentiant l'équation (5), il viendra

$$\psi(m+n)(dm+dn) = \psi(m)dm + \psi(n)dn ;$$

donc (*Lemme I*)

$$\psi(m+n) = \psi(m) = \psi(n) :$$

donc (*Lemme II*) $\psi(m) = a$, a étant une nouvelle constante ; on a donc $d.f(m) = adm$, d'où $f(m) = am$; nous n'ajoutons pas de nouvelle constante parce que $f(m)$ doit être nulle en même temps que m.

On a donc

$$d.x^m = amx^{m-1}dx ;$$

et, si l'on fait $m = 1$, on en conclura $dx = adx$; donc $a = 1$; donc $C = m$; donc enfin

$$d.x^m = max^{m-1} dx.$$

2.° Dans la différentielle $d.a^x = Ca^x dx$, la constante C ne peut être qu'une fonction de a qu'on appelle *la base*, et doit changer avec cette base. Appelons e la valeur de a pour laquelle C devient l'unité, nous aurons

$$d.e^x = a^x dx.$$

Faisons ensuite $a^x = e^y$; nous en conclurons, par la différentiation

$$Ca^x dx = e^y dy \text{, d'où } C = \frac{dy}{dx} ;$$

or, si nous désignons par la caractéristique l les logarithmes qui

répondent à la base e et qu'on appelle *Logarithmes naturels*, et par L ceux qui répondent à la base a, l'équation $a^x=e^y$ donnera $xla=y$ et $x=yLe$; donc

$$dy=dxla\ ,\quad dx=dyLe\ ;$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=la=\frac{1}{Le}\ ,\quad \text{d'où}\quad C=la=\frac{1}{Le}.$$

3.° La constante C, dans l'équation $d.Lx=\frac{Cdx}{x}$, se détermine bien facilement par ce qui précède. En posant $Lx=y$, il vient $\frac{Cdx}{x}=dy$, d'où $C=\frac{xdy}{dx}$; or de $Lx=y$ résulte $x=a^y$ et conséquemment $dx=la.a^ydy=la.xdy$, ou bien $dx=\frac{a^ydy}{Le}=\frac{xdy}{Le}$ donc $C=\frac{1}{la}=Le$, et par conséquent

$$d.Lx=\frac{dx}{xla}=\frac{dxLe}{x}.$$

4.° Si, dans l'équation $d.\text{Sin}.x=Cdx\text{Cos}.x$, on suppose que l'arc x décroisse continuellement, jusqu'à devenir nul, on aura $\text{Sin}.x=x$ et $\text{Cos}.x=1$, d'où $d.\text{Sin}.x=Cdx$ ou $\text{Sin}.x=Cx$, ce qui donne $C=\frac{\text{Sin}.x}{x}$; mais, on démontre rigoureusement (*) qu'à la limite $\frac{\text{Sin}.x}{x}=1$; donc $C=1$, et conséquemment

$$d.\text{Sin}.x=dx\text{Cos}.x\ ,\quad d.\text{Cos}.x=-dx\text{Sin}.x.$$

D'après cette détermination des constantes, les différentielles des fonctions x^m, a^x, $\text{Log}.x$, $\text{Sin}.x$, $\text{Cos}.x$ se trouvent ramenées à la forme connue. Et, comme ces fonctions sont les élémens de toutes les autres fonctions connues, on parviendra sans difficulté, par ce qui précède, aux différentielles de ces dernières.

(*) Voyez le *Calcul des fonctions*, leçon v^e.

On voit, par la manière dont nous avons déterminé la constante dans $d.x^m$, que notre méthode peut être employée à déterminer la forme d'une fonction inconnue qui doit satisfaire à une relation donnée.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Construction des formules qui servent à déterminer directement la grandeur et la situation des diamètres principaux, dans les courbes du second degré rapportées à deux axes rectangulaires quelconques.

Par M. Rochat, professeur de navigation à St-Brieux.

On donne, dans plusieurs ouvrages élémentaires, des méthodes propres à la recherche des diamètres principaux des courbes du second degré, rapportées à deux axes rectangulaires quelconques; mais, les calculs relatifs à cette recherche n'y étant point terminés, j'ai pensé qu'il pouvait être utile de remplir cette lacune, en donnant des formules propres à ramener directement l'équation

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0 \qquad (1)$$

à la forme

$$\pm A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2 ,$$

si b^2-4ac n'est pas zéro; et à la forme

$$y^2=Px ,$$

dans le cas contraire.

Pour parvenir à ce but, changeons d'abord, dans l'équation (1), x en $x'+m$, et y en $y'+n$, et ensuite x' en $x''\text{Cos.}\alpha-y''\text{Sin.}\alpha$, et y' en $x''\text{Sin.}\alpha+y''\text{Cos.}\alpha$; la transformée en x'' et y'' sera

$$\left.\begin{array}{r}a\text{Cos.}^2\alpha\\ -b\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha\\ +c\text{Sin.}^2\alpha\end{array}\right| y''^2 + \left.\begin{array}{r}2a\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha\\ -2c\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha\\ +b\text{Cos}^2\alpha\\ -b\text{Sin.}^2\alpha\end{array}\right| x''y'' + \left.\begin{array}{r}a\text{Sin.}^2\alpha\\ +b\text{Sin.}\alpha\text{ Cos.}\alpha\\ +\quad c\text{Cos.}^2\alpha\end{array}\right| x''^2 + \left.\begin{array}{r}d'\text{Cos.}\alpha\\ -e'\text{Sin.}\alpha\end{array}\right| y'' + \left.\begin{array}{r}d'\text{Sin.}\alpha\\ +e'\text{Cos.}\alpha\end{array}\right| x'' + f' = 0;$$

équation dans laquelle on a

$$d' = 2an + bm + d\ , \qquad f' = an^2 + bmn + cn^2 + dn + em + f.$$
$$e' = 2cm + bn + e\ ,$$

Posons présentement

$$b(\text{Cos.}^2\alpha - \text{Sin.}^2\alpha) + 2(a - c)\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha = 0\ ,$$
$$a\text{Cos.}^2\alpha - b\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha + c\text{Sin.}^2\alpha = M\ ,$$
$$a\text{Sin.}^2\alpha + b\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}\alpha + c\text{Cos.}^2\alpha = N\ ;$$

nous trouverons (*Voyez* Biot ou Garnier)

$$\text{Tang.}2\alpha = -\frac{b}{a-c}\ , \qquad M = \tfrac{1}{2}\left\{(a+c) + \sqrt{b^2 + (a-c)^2}\right\}\ ,$$
$$N = \tfrac{1}{2}\left\{(a+c) - \sqrt{b^2 + (a-c)^2}\right\}\ ;$$

et la transformée sera

$$My''^2 + Nx''^2 + (d'\text{Cos.}\alpha - e'\text{Sin.}\alpha)y'' + (d'\text{Sin.}\alpha + e'\text{Cos.}\alpha)x'' + f' = 0.\ (2)$$

Soit, en premier lieu $b^2 - 4ac$ positif ou négatif, différent de zéro ; en posant

$$d'\text{Cos.}\alpha - e'\text{Sin.}\alpha = 0\ , \quad d'\text{Sin.}\alpha + e'.\text{Cos.}\alpha = 0\ ,$$

il viendra (*Voyez* les Auteurs cités)

$$a = \frac{2ae - bd}{b^2 - 4ac}\ ; \quad b = \frac{2cd - be}{b^2 - 4ac}\ ;$$

et la transformée sera simplement

$$My''^2 + Nx''^2 + f' = 0.$$

Si nous désignons respectivement par A et B, dans cette équation, les valeurs de x'' et y'' qui répondent à $y'' = 0$ et $x'' = 0$, nous aurons

M

$$M=-\frac{f'}{B^2}\quad,\quad N=-\frac{f'}{A^2}\;;$$

ce qui donnera, en substituant et chassant les dénominateurs,

$$A^2y''^2+B^2x''^2=A^2B^2.$$

Si présentement nous portons les valeurs déterminées ci-dessus pour a et b dans celle de f', elle deviendra, toutes réductions faites,

$$f'=\frac{ae^2+cd^2-bde}{b^2-4ac}+f\,,$$

et de là nous conclurons

$$A=\sqrt{\frac{2[bde-ae^2-cd^2-(b^2-4ac)f]}{(b^2-4ac)[(a+c)-\sqrt{b^2+(a-c)^2}]}}\,,$$

$$B=\sqrt{\frac{2[bde-ae^2-cd^2-(b^2-4ac)f]}{(b^2-4ac)[(a+c)+\sqrt{b^2+(a-c)^2}]}}\,.$$

Ainsi le centre sera donné par les valeurs de a et b, les grandeurs des axes par celles de A et B, et leurs directions par celle de Tang.2α.

Soit, en deuxième lieu, $b^2-4ac=0$, d'où $M=a+c$, $N=0$; nous supposerons alors, dans l'équation (2)

$$f'=an^2+bmn+cm^2+dn+em+f=0\,,\quad d'\text{Cos.}\alpha-e'\text{Sin.}\alpha=0\;;$$

et la transformée sera

$$My''^2+(d'\text{Sin.}\alpha+e'\text{Cos.}\alpha)x''=0.$$

Présentement comme nous avons trouvé ci-dessus

$$\text{Tang.}2\alpha=-\frac{b}{a-c}\,,$$

puisqu'on a d'ailleurs

$$\text{Tang.}2\alpha=\frac{2\text{Tang.}\alpha}{1-\text{Tang.}^2\alpha}\,,$$

il viendra, en égalant ces deux valeurs

$$b\text{Tang.}^2\alpha-2(a-c)\text{Tang.}\alpha-b=0\,,$$

d'où

$$\text{Tang.}\alpha = \frac{(a-c) \pm \sqrt{b^2+(a-c)^2}}{b} = \frac{(a-c) \pm (a+c)}{b},$$

c'est-à-dire,

$$\text{Tang.}\alpha = \frac{2a}{b}, \quad \text{Tang.}\alpha = -\frac{2c}{b};$$

d'un autre côté l'équation $d'\text{Cos.}\alpha - e'\text{Sin.}\alpha = 0$ donne

$$\text{Tang.}\alpha = \frac{d'}{e'} = \frac{2an+bm+d}{2cm+bn+e};$$

valeurs qui ne saurait s'accorder avec $\text{Tang.}\alpha = \frac{2a}{b}$, parce qu'elles conduiraient à la condition $bd-2ae=0$ qui, jointe à $b^2-4ac=0$, exprime, comme l'on sait, que la courbe dégénère dans le système de deux droites. Il faudra donc prendre $\text{Tang.}\alpha = -\frac{2c}{b}$; en égalant cette valeur à la précédente, et résolvant l'équation résultante par rapport à m, il viendra

$$m = -\frac{2b(a+c)n-(bd+2ce)}{b^2+4c^2}.$$

En mettant cette valeur dans l'équation $f'=0$, et se rappelant la relation $b^2-4ac=0$, le coefficient de n^2 disparaîtra, et il viendra

$$n = \frac{c^2e^2+abde+2ace^2-acd^2-4cf(a+c)^2}{2(a+c)^2(2cd-be)},$$

et par suite

$$m = \frac{a^2d^2+bcde+2acd^2-ace^2-4af(a+c)^2}{2(a+c)^2(2ae-bd)}.$$

On a en outre

$$d'\text{Sin.}\alpha + e'\text{Cos.}\alpha = (d'\text{Tang.}\alpha + e')\text{Cos.}\alpha$$

or, $\text{Tang.}\alpha = -\frac{2c}{b}$, d'où $\text{Cos.}\alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2+4c^2}}$; donc

$$d'\text{Sin.}\alpha + e'\text{Cos.}\alpha = -\frac{2cd-be}{\sqrt{b^2+4c^2}};$$

posant donc

$$P=\frac{2cd-be}{(a+c)\sqrt{b^2+4c^2}}\,;$$

la transformée sera

$$y''^2=Px''.$$

Ainsi les coordonnées du sommet seront données par les valeurs de m et n, la direction de l'axe par celle de Tang.α, et le paramètre par celle de P.

Au surplus, comme, dans certains cas particuliers, ces formules pourraient devenir illusoires, il sera convenable d'y remplacer b par $2\sqrt{ac}$; on aura ainsi

$$\text{Tang.}\alpha=-\sqrt{\frac{c}{a}}\,,\qquad P=\frac{d\sqrt{c}-e\sqrt{a}}{(a+c)\sqrt{a+c}}\,,$$

$$m=\frac{ad^2\sqrt{a}+2cde\sqrt{c}+2cd^2\sqrt{a}-ce^2\sqrt{a}-4f(a+c)^2\sqrt{a}}{4(a+c)^2(e\sqrt{a}-d\sqrt{c})}\,,$$

$$n=\frac{ce^2\sqrt{c}+2ade\sqrt{a}+2ae^2\sqrt{c}-ad^2\sqrt{c}-4f(a+c)^2\sqrt{c}}{4(a+c)^2(d\sqrt{c}-e\sqrt{a})}\,;$$

sous cette forme leur application n'entraînera plus aucune difficulté.

Addition au précédent mémoire ;

Par M. GERGONNE.



ON peut atteindre au but que vient de remplir M. Rochat par une autre méthode, moins élémentaire il est vrai, mais qui a l'avantage de n'exiger aucune transformation de coordonnées, et qui peut fournir une agréable et utile application de la doctrine des *Maximis et Minimis* à ceux qui étudient le calcul différentiel ; je vais l'exposer brièvement.

Soit reprise l'équation

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0\ ; \qquad (M)$$

et, outre le point de la courbe dont les coordonnées sont x et y, considérons-en un autre dont les coordonnées soient x' et y'; nous aurons pour ce nouveau point.

$$ay'^2+bx'y'+cx'^2+dy'+ex'+f=0\ ; \qquad (M')$$

posons

$$(x-x')^2+(y-y')^2=maximum\ ; \qquad (N)$$

nos deux points seront alors les extrémités de la plus grande corde de la courbe.

L'équation (N) revient à

$$(x-x')(\delta x-\delta x')+(y-y')(\delta y-\delta y')=0\ ; \qquad (n)$$

d'un autre côté, on tire des équations (M) et (M')

$$(2ay+bx+d)\delta y+(2cx+by+e)\delta x=0\ , \qquad (m)$$
$$(2ay'+bx'+d)\delta y'+(2cx'+by'+e)\delta x'=0\ ; \qquad (m')$$

ajoutant les produits de ces deux dernières par les multiplicateurs indéterminés λ et $-\lambda'$ à l'équation (n) il viendra

$$\left.\begin{array}{l}[(x-x')+\lambda(2cx+by+e)]\delta x-[(x-x')+\lambda'(2cx'+by'+e)]\delta x'\\ +[(y-y')+\lambda(2ay+bx+d)]\delta y-[(y-y')+\lambda'(2ay'+bx'+d)]\delta y'\end{array}\right\}=0;$$

donc

$$(x-x')+\lambda(2cx+by+e)=0\ , \quad (x-x')+\lambda'(2cx'+by'+e)=0\ ,$$
$$(y-y')+\lambda(2ay+by+d)=0\ , \quad (y-x')+\lambda'(2ay'+bx'+d)=0\ ;$$

éliminant λ et λ' entre ces équations, elles deviendront

$$(2ay+bx+d)(x-x')=(2cx+by+e)(y-y')\ , \qquad (P)$$
$$(2ay'+bx'+d)(x-x')=(2cx'+by'+e)(y-y')\ . \qquad (P')$$

On satisfait à ces équations, quel que soit le premier des points pris sur la courbe, en supposant que le second se confond avec lui, ce qui donne sur-le-champ la direction de la tangente en ce point, ainsi que cela doit être.

Rejetant cette hypothèse et retranchant l'équation (P′) de l'équation (P) il vient

$$\{2a(y-y')+b(x-x')\}(x-x')=\{2c(x-x')+b(y-y')\}(y-y');$$

mais, en désignant par α l'angle que fait la corde que nous considérons ici avec l'axe des x, on a

$$\text{Tang.}\alpha=\frac{y-y'}{x-x'}, \quad \text{d'où} \quad y-y'=(x-x')\text{Tang.}\alpha,$$

substituant donc, il viendra, en réduisant, transposant et divisant par $x-x'$

$$\text{Tang.}^2\alpha-2.\frac{a-c}{b}\text{Tang.}\alpha-1=0. \qquad (K)$$

Ainsi, dans les lignes du deuxième ordre, les cordes dont la variation est nulle, n'affectent que deux directions, et les tangentes des angles qu'elles forment avec l'axe des x se trouvent déterminées par l'équation précédente. On voit de plus que ces directions sont perpendiculaires l'une à l'autre, puisque le produit des deux tangentes est égal à -1.

En ajoutant, au contraire, l'une à l'autre les équations (P), (P′), substituant pour $y-y'$, dans l'équation résultante, sa valeur $(x-x')\text{Tang.}\alpha$ et divisant par $x-x'$, il vient

$$(2a-b\text{Tang.}\alpha)(y+y')-(2c\text{Tang.}\alpha-b)(x+x')+2(d-e\text{Tang.}\alpha)=0. \qquad (G)$$

D'un autre côté, en retranchant l'équation (M′) de l'équation (M), le double de l'équation résultante peut être mis sous cette forme

$$\left.\begin{array}{l}[2a(y+y')+b(x+x')+2d](y-y')\\ +[2c(x+x')+b(y+y')+2e](x-x')\end{array}\right\}=0;$$

ou, en chassant encore $y-y'$ et divisant par $x-x'$,

$$(2a\text{Tang.}\alpha+b)(y+y')+(2c+b\text{Tang.}\alpha)(x+x')+2(d\text{Tang.}\alpha+e)=0. \qquad (H)$$

Les équations (G) et (H) donnent

$$\tfrac{1}{2}(x+x')=\frac{2ae-bd}{b^2-4ac}, \qquad \tfrac{1}{2}(y+y')=\frac{2cd-ae}{b^2-4ac};$$

ainsi, les cordes des lignes du second ordre dont la variation est

nulle, ont leurs milieux au même point qu'on appelle leur *centre*; et, puisque ces cordes doivent d'ailleurs se couper perpendiculairement, elles sont au nombre de deux seulement. On les appelle les *axes de la courbe*.

Ces axes ont donc pour équation commune

$$y-\frac{2cd-ae}{b^2-4ac}=\left\{x-\frac{2ae-bd}{b^2-4ac}\right\}\text{Tang.}\alpha\,,$$

équation double, à cause des deux valeurs de Tang.α; cette équation combinée avec celle de la courbe fera connaître les longueurs de ces mêmes axes.

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration du principe qui sert de fondement à la théorie des équations;

Par M. Dubourguet, professeur de mathématiques spéciales au lycée impérial.



Toute la théorie des équations algébriques repose sur le théorème suivant :

Une fonction algébrique, rationnelle et entière d'une seule variable étant donnée; parmi le nombre infini de valeurs, réelles ou imaginaires, que l'on peut donner à la variable, il en existe toujours une, au moins, dont la substitution rend nul le polynome proposé; ou, en d'autres termes, *toute équation algébrique d'un degré quelconque, à une seule inconnue, admet toujours une racine, au moins.*

Quelque fondamental que soit ce principe, plusieurs auteurs d'élémens d'algèbre ont négligé de le démontrer, ou ne l'ont fait que bien longtemps après avoir développé la théorie des équations : ce qui est contraire à la méthode et à l'ordre qui doit régner dans un livre.

élémentaire où les théories qu'on développe ne doivent poser que sur des principes déjà démontrés. Cette sorte d'interversion, dans l'ordre des propositions, a été considérée comme nécessaire, par les auteurs en question, parce qu'ils ont jugé le principe dont il s'agit ici d'une démonstration trop difficile pour de simples élémens. Je crois donc faire une chose utile en ramenant la démonstration de ce principe aux notions élémentaires que doivent déjà avoir acquises les élèves qui parviennent à la théorie générale des équations.

Soit le polynome du $n.^{me}$ degré

$$Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots.+Px+Q\,, \qquad (1)$$

dans lequel les coefficiens A, B, C.....P, Q sont des quantités réelles finies quelconques, et où x représente une variable. Puisque ce polynome change de valeur, à chaque valeur qu'on attribue à x; il peut lui-même être considéré comme une variable. Représentant donc cette variable par y, on aura l'équation

$$Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots..+Px+Q=y\,, \qquad (2)$$

qui établit entre les variables x et y une relation en vertu de laquelle chacune d'elles est déterminée par l'autre.

De même donc que, dans l'équation (2), y se trouve exprimée en fonction de x et des coefficiens, il doit y avoir réciproquement une expression de x en fonction de y et des mêmes coefficiens; de manière qu'on doit avoir

$$x=\varphi(A\,,B\,,C\,,\ldots P,\,Q\,,y)\,, \qquad (3)$$

φ désignant une fonction qui peut être inconnue, mais qui, dans tous les cas, doit être absolument déterminée. Cette dernière équation n'est, au fond, qu'une transformation de l'équation (2); et, si l'on en contestait l'existence, il faudrait admettre qu'il y a des valeurs de x indépendantes de celles de y, et réciproquement, ce qui serait contradictoire avec l'équation (2), et par conséquent absurde. (*)

(*) Si l'équation (3) pouvait ne pas exister, c'est-à-dire, si x pouvait n'être pas fonction de y; alors, en représentant par a une des valeurs de x qui ne dépendraient pas de celles de y, le polynome déterminé

Cela posé, il est clair que si, dans l'équation (3), on fait $y=0$, on ne pourra avoir $x=0$ ni $x=\infty$; car, dans le premier cas, l'équation (2) donnerait $Q=0$, et, dans le second, elle donnerait $Q=-A\infty^n=\infty$, résultats contraires à l'hypothèse ; donc, lorsqu'on pose $y=0$, x doit avoir une valeur, réelle ou imaginaire, différente de zéro et de l'infini, telle que

$$x=\psi(A,\ B,\ C.....P,\ Q)\ ;$$

qui satisfasse à l'équation

$$Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+....+Px+Q=0\ .$$

à laquelle se réduit l'équation (2) dans la même hypothèse de $y=0$; donc il y a, au moins, une fonction des coefficiens de cette dernière équation qui, substituée dans son premier membre, à la place de x, réduit ce premier membre à zéro. Cest-là ce qu'il s'agissait de démontrer.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solutions du problème de probabilité proposé à la page 224 de ce volume.



ENONCÉ. *Deux joueurs, dont chacun a un nombre de jetons connu, et dont les adresses respectives sont* m *et* n, *conviennent de ne quitter le jeu que lorsque l'un d'eux aura gagné tous les jetons de l'autre. A chaque partie le perdant donne un jeton au gagnant; on demande quelle est l'espérance de chaque joueur ?*

$$Aa^n+Ba^{n-1}+Ca^{n-2}+....+Pa+Q$$

devrait, en vertu de l'équation (2) être à la fois égal à toutes les valeurs qu'on voudrait donner à y ; ce qui est absurde.

Première

Première solution ;

Par M. D. ENCONTRE, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Montpellier.

I.

LORSQUE deux joueurs sont prêts à commencer la partie, et ont déjà formé l'enjeu total, ils en cèdent l'un et l'autre l'entière propriété à celui des deux qui gagnera. Chacun a d'ailleurs droit d'attendre ce que le hasard doit probablement lui donner ; et, s'ils se trouvent contraints d'abandonner la partie, l'enjeu doit être partagé entre eux, non d'une manière égale, mais de manière que la part de chacun soit proportionnée à la probabilité qu'il aurait eu de gagner le tout, si la partie eût été continuée.

Très-généralement, les droits respectifs des deux joueurs sur l'enjeu total, au moment où la partie se trouve interrompue, sont en raison des probabilités qui leur sont respectivement favorables, ou, en d'autres termes, de leurs espérances mathématiquement calculées.

II.

Lorsque, de deux chances données, une doit nécessairement arriver ; que la première promet à un joueur une certaine somme ou un certain droit, que la seconde promet au même joueur une autre somme ou un autre droit, et qu'elles ne sont pas également probables ; la somme ou le droit que le joueur dont il s'agit doit raisonnablement attendre, en vertu des deux chances données, équivaut à la somme ou au droit qu'apporterait la première chance multipliée par sa probabilité, plus la somme ou le droit qu'apporterait la seconde, multipliée aussi par sa probabilité.

Supposons 1.° qu'il y ait, dans une bourse, deux billets, l'un de 6 francs et l'autre de 12, et qu'un joueur ait actuellement le droit de prendre, au hasard, un de ces deux billets. Les probabilités

étant égales, et exprimées, l'une et l'autre, par $\frac{1}{2}$, le droit réel de notre joueur équivaut à

$$6.\tfrac{1}{2}+12.\tfrac{1}{2}=9.$$

Supposons 2.° qu'il y ait, dans une bourse, trois billets : savoir, deux de 12 francs et un de 6 ; et qu'un joueur ait le droit de prendre, au hasard, un de ces trois billets. La probabilité qu'il tirera un des deux billets de 12 francs étant exprimée par $\frac{2}{3}$, et la probabilité qu'il tirera celui de 6 francs étant exprimée par $\frac{1}{3}$; la somme à laquelle il doit raisonnablement prétendre sera

$$12.\tfrac{2}{3}+6.\tfrac{1}{3}=10.$$

Supposons 3.° qu'il y ait, dans une bourse, quatre billets, dont un donne droit de prendre, au hasard, un des billets de la bourse du premier exemple, et dont chacun des trois autres donne droit de prendre, au hasard, un des billets de la bourse du second exemple ; l'espérance du joueur qui aura le droit de prendre, au hasard, un de ces quatre billets sera

$$9.\tfrac{1}{4}+10.\tfrac{3}{4}=9,75.$$

III.

Ces principes étant admis par tous les mathématiciens, nous ne nous arrêterons ni à les démontrer ni à les expliquer par un plus grand nombre d'exemples, et nous passerons de suite à leur application à la question proposée. Mais, pour nous ouvrir plus facilement la voie à la solution générale, nous commencerons par un exemple particulier.

Soient A et B les deux joueurs, et convenons, en *général*, de désigner par A_p et B_q leurs états respectifs, lorsque le premier aura p jetons et le second q. Supposons, par exemple, que le premier ait deux fois plus d'adresse que le second, en sorte qu'à chaque partie il y ait deux à parier contre un que ce sera lui qui gagnera ; alors leurs probabilités respectives de gagner une partie quelconque, seront $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$. Donnons enfin un jeton à A et quatre à B, ce que nous exprimerons ainsi

$$A_1\ ,\quad B_4\ .$$

Les conditions du jeu étant celles qu'on a vues dans l'énoncé du problème, proposons-nous de trouver, dans ce cas particulier, le droit des deux joueurs sur l'enjeu commun, ou quelles sont leurs espérances, mathématiquement calculées.

Soient désignées respectivement par x_1, x_2, x_3, x_4 les probabilités favorables au joueur A, dans les hypothèses successives

$$A_1\,,\ B_4\ ;\ A_2\,,\ B_3\ ;\ A_3\,,\ B_2\ ;\ A_4\,,\ B_1\ ;$$

d'après quoi on aura, $x_0=0$, $x_5=1$.

Il est évident que, suivant que A gagnera la première partie ou qu'il la perdra, son espérance deviendra x_2 ou $x_0=0$; que s'il la gagne, suivant qu'il gagnera ou qu'il perdra la seconde, son espérance deviendra x_3 ou x_1, et ainsi de suite ; puis donc que les probabilités qu'il a de gagner ou de perdre chaque partie, sont respectivement $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$, on aura

$$\begin{aligned}
x_1&=\tfrac{2}{3}x_2\ ,\\
x_2&=\tfrac{2}{3}x_3+\tfrac{1}{3}x_1\ ,\\
x_3&=\tfrac{2}{3}x_4+\tfrac{1}{3}x_2\ ,\\
x_4&=\tfrac{2}{3}\quad+\tfrac{1}{3}x_3\ ;
\end{aligned}$$

ces équations étant en même nombre que les inconnues qu'elles renferment, ces inconnues pourront être déterminées et conséquemment on pourra assigner, pour chaque état du jeu, l'espérance de chacun des joueurs.

En faisant le calcul, désignant en général par y_q l'espérance de B lorsqu'il a q jetons, et se rappelant que la somme des espérances des deux joueurs doit être l'unité, on obtiendra le tableau suivant

$$\text{Hypothèses}\left\{\begin{array}{l}
A_1\ ,\ B_4\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ x_1=\frac{16}{31}\ ,\ y_4=\frac{15}{31}\ ;\\
A_2\ ,\ B_3\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ x_2=\frac{24}{31}\ ,\ y_3=\frac{7}{31}\ ;\\
A_3\ ,\ B_2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ x_3=\frac{28}{31}\ ,\ y_2=\frac{3}{31}\ ;\\
A_4\ ,\ B_1\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ x_4=\frac{30}{31}\ ,\ y_1=\frac{1}{31}\ .
\end{array}\right.$$

Ainsi, dans l'hypothèse proposée A_1, B_4, les espérances des joueurs A et B sont respectivement $\frac{16}{31}$ et $\frac{15}{31}$. Mais on voit que, pour parvenir à ce résultat, nous avons été obligés de calculer les espérances des

deux joueurs, dans d'autres hypothèses que nous n'avions pas en vue; ce qui, à raison des longueurs qui en résultent, est un inconvénient que ne présentera plus l'emploi des formules générales que nous allons chercher à construire.

IV.

Soit s le nombre total des jetons des deux joueurs. Considérons les états successifs A_1, B_{s-1}; A_2, B_{s-2}; A_3, B_{s-3}; ..... A_{s-3}, B_3; A_{s-2}, B_2; A_{s-1}, B_1; et désignons respectivement par x_1, x_2, x_3, ... x_{s-3}, x_{s-2}, x_{s-1}, les espérances de A qui leur répondent. Si m et n représentent les adresses respectives des deux joueurs, la probabilité que A gagnera une partie quelconque sera $\frac{m}{m+n}$, tandis que la probabilité qu'il la perdra sera $\frac{n}{m+n}$; en raisonnant donc comme ci-dessus, on obtiendra cette suite d'équations

$$x_1=\frac{m}{m+n}x_2\ ,$$

$$x_2=\frac{m}{m+n}x_3+\frac{n}{m+n}x_1\ ,$$

$$x_3=\frac{m}{m+n}x_4+\frac{n}{m+n}x_2\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_{s-3}=\frac{m}{m+n}x_{s-2}+\frac{n}{m+n}x_{s-4}\ ,$$

$$x_{s-2}=\frac{m}{m+n}x_{s-1}+\frac{n}{m+n}x_{s-3}\ ,$$

$$x_{s-1}=\frac{m}{m+n}\qquad+\frac{n}{m+n}x_{s-2}\ ;$$

lesquelles seront toujours en même nombre que les inconnues qu'elles renferment.

Si maintenant on suppose successivement $s=2$, 3, 4,..., ce qui réduira aussi à 2, 3, 4, ..., le nombre des équations; on trouvera

Pour deux jetons, $x_1=\frac{m}{m+n}=\frac{m(m-n)}{m^2-n^2}$;

Pour trois jetons $\begin{cases} x_1 = \dfrac{m^2}{m^2+mn+n^2} = \dfrac{m^2(m-n)}{m^3-n^3}, \\ x_2 = \dfrac{m(m+n)}{m^2+mn+n^2} = \dfrac{m(m^2-n^2)}{m^3-n^3}; \end{cases}$

Pour quatre jetons $\begin{cases} x_1 = \dfrac{m^3}{m^3+m^2n+mn^2+n^3} = \dfrac{m^3(m-n)}{m^4-n^4}, \\ x_2 = \dfrac{m^2(m+n)}{m^3+m^2n+mn^2+n^3} = \dfrac{m^2(m^2-n^2)}{m^4-n^4}, \\ x_3 = \dfrac{m(m^2+mn+n^2)}{m^3+m^2n+mn^2+n^3} = \dfrac{m(m^3-n^3)}{m^4-n^4}; \end{cases}$

et ainsi de suite.

La loi de ces résultats est manifeste, et on en conclut facilement que, x_p et y_q désignant respectivement les espérances de A et B qui répondent à l'état A_p, B_q, on doit avoir généralement, à cause de $x_p+y_q=1$,

$$x_p = \frac{m^q(m^p-n^p)}{m^{p+q}-n^{p+q}}, \quad y_q = \frac{n^p(m^q-n^q)}{m^{p+q}-n^{p+q}}.$$

Il faudra seulement avoir l'attention, dans le cas particulier où l'on aura $n=m$, de délivrer ces formules du facteur $m-n$ qui affecte leur numérateur et leur dénominateur, avant d'en faire l'application.

Pour donner un exemple de l'usage de ces formules, supposons que le joueur A ait 6 jetons, et que le joueur B en ait 4 seulement; il faudra faire $p=6$ et $q=4$; les formules deviendront donc

$$x_6 = \frac{m^4(m^6-n^6)}{m^{10}-n^{10}}, \quad y_4 = \frac{n^6(m^4-n^4)}{m^{10}-n^{10}}.$$

Si nous supposons, en outre, que l'adresse de A soit double de celle de B, ce qui donnera $m=2$, $n=1$, il viendra

$$x_6 = \frac{2^4(2^6-1)}{2^{10}-1} = \frac{10.63}{1023} = \frac{336}{341}, \quad y_4 = \frac{2^4-1}{2^{10}-1} = \frac{15}{1023} = \frac{5}{341};$$

les espérances respectives de A et B seront donc $\frac{336}{341}$ et $\frac{5}{341}$; elles seront donc dans le rapport de 336 à 5.

V.

On peut faire diverses observations curieuses sur la question qui nous occupe. Nous nous bornerons aux deux suivantes qui peuvent être utiles.

1.° En délivrant les valeurs de x^p et y^q du facteur $m-n$ qui affecte leur numérateur et leur dénominateur, et posant ensuite $n=m$, elles deviennent toutes réductions faites

$$x_p=\frac{p}{p+q}\,,\quad y_q=\frac{q}{p+q}\,;$$

ainsi, lorsque les deux joueurs sont d'adresse égale, leurs espérances respectives sont dans le rapport du nombre de leurs jetons ; comme on pouvait bien le prévoir.

2.° Mais ce serait une erreur de croire qu'à l'inverse, lorsque les jetons sont également répartis entre les deux joueurs, leurs espérances sont proportionnelles à leurs adresses respectives. Si en effet on fait $q=p$, on a

$$x_p=\frac{m^p}{m^p+n^p}\,,\quad y_p=\frac{n^p}{m^p+n^p}\,;$$

d'où l'on voit que leurs espérances sont dans le rapport de m^p à n^p ; lequel ne devient celui de m à n que dans le cas particulier où $p=1$.

Deuxième solution ;

Par MM. Lhuilier, professeur de mathématiques, et Peschier, professeur de philosophie et inspecteur à l'académie impériale de Genève. (*)

Que les deux joueurs soient désignés par A et B (**) ;
Que leurs adresses respectives soient m et n ;

(*) Après nous être communiqué nos solutions, nous les avons trouvées si semblables l'une à l'autre, que nous avons cru devoir les réunir sous une rédaction commune.

(**) Pour faciliter la comparaison des résultats, on a cru convenable d'employer ici des notations pareilles à celles du mémoire précédent.

(*Note des éditeurs.*)

Que l'état du jeu lorsque A a p jetons et que B en a q soit désigné par A_p, B_q;

Qu'enfin l'espérance de A lorsqu'il a p jetons soit désignée par x_p.

A chaque distribution de jetons, le joueur A a m cas pour obtenir un jeton de plus et n cas pour en avoir un de moins.

En remarquant donc que $x_0 = 0$, on aura les équations

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{m}{m+n} x_2, \\ x_2 &= \frac{m}{m+n} x_3 + \frac{n}{m+n} x_1, \\ x_3 &= \frac{m}{m+n} x_4 + \frac{n}{m+n} x_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{p-1} &= \frac{m}{m+n} x_p + \frac{n}{m+n} x_{p-2}; \end{aligned}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{aligned} x_2 &= \frac{m+n}{m} x_1, \\ x_3 &= \frac{m+n}{m} x_2 - \frac{n}{m} x_1, \\ x_4 &= \frac{m+n}{m} x_3 - \frac{n}{m} x_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_p &= \frac{m+n}{m} x_{p-1} - \frac{n}{m} x_{p-2}; \end{aligned}\right.$$

Partant les attentes successives de A forment une suite recurrente dont l'échelle de relation est

$$+\frac{m+n}{m}, \; -\frac{n}{m}.$$

Cette suite provient du développement de la fraction

$$\frac{1}{1 - \frac{m+n}{m} z + \frac{n}{m} z^2} = \frac{1}{(1-z)\left(1 - \frac{n}{m} z\right)};$$

laquelle équivaut à la somme de ces deux-ci

$$\frac{m}{m-n} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{m}{m-n} (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{p-1} + \ldots),$$

$$-\frac{n}{m-n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{n}{m} z} = \frac{n}{m+n} \left(1 + \frac{n}{m} z + \frac{n^2}{m^2} z^2 + \ldots + \frac{n^{p-1}}{m^{p-1}} z^{p-1} + \ldots\right);$$

Partant, on doit avoir,

$$x_p = \frac{m^p - n^p}{m^{p-1}(m-n)} x_1;$$

mais, si l'on suppose que p devienne $p+q$ et que $p+q$ soit le

nombre total des jetons des deux joueurs, on doit avoir $x_{p+q}=1$; donc

$$1=\frac{m^{p+q}-n^{p+q}}{m^{p+q-1}(m-n)}x_1 \text{ d'où } x_1=\frac{(m-n)m^{p+q-1}}{m^{p+q}-n^{p+q}};$$

et partant

$$x_p=\frac{m^q(m^p-n^p)}{m^{p+q}-n^{p+q}}.$$

Ainsi p étant le nombre des jetons de A, et q le nombre des jetons de B, leurs espérances respectives sont

$$\frac{m^q(m^p-n^p)}{m^{p+q}-n^{p+q}}, \quad \frac{n^p(m^q-n^q)}{m^{p+q}-n^{p+q}}.$$

Remarque I. Ces expressions peuvent toujours être délivrées du facteur $m-n$, commun à leur numérateur et à leur dénominateur.

Remarque II. Lorsque $m=n$, ces expressions ainsi réduites deviennent

$$\frac{p}{p+q}, \quad \frac{q}{p+q};$$

ainsi alors les espérances des deux joueurs sont proportionnelles à leurs nombres de jetons. Ce résultat est indiqué par le simple bon sens, mais il était convenable de le confirmer par le calcul.

Remarque III. La solution du problème proposé n'est pas compliquée par le retour aux mêmes états de distribution des jetons entre les deux joueurs, provenant des compensations de gains et de pertes; bien que cette alternative de gains et de pertes ait une grande influence sur la durée du jeu. (*)

Remarque IV. Plus m est grand relativement à n, et plus le rapport

(*) On dit communément que, pour obtenir la probabilité d'un évènement, il faut diviser le nombre des chances qui peuvent y donner lieu par le nombre total des chances, ou plus généralement, la somme des probabilités des chances qui peuvent y donner lieu par la somme des probabilités de toutes les chances; et cela est exact. Mais il conviendrait d'ajouter qu'il y a des cas où cette méthode est impraticable, et tel est le cas de la question présente; puisqu'à raison des retours aux mêmes états, qui peuvent se répéter indéfiniment, le nombre total des chances possibles et celui des chances d'où peut résulter l'évènement dont on cherche la probabilité, sont, l'un et l'autre, infinis. (*Note des éditeurs.*)

rapport des attentes des deux joueurs approche d'être celui des puissances des nombres qui expriment leurs adresses respectives, ayant pour exposans le nombre des jetons de A ; et partant, l'attente de A approche alors d'autant plus de la certitude que le nombre de ses jetons est plus grand.

Post-scriptum. Après avoir terminé ce petit mémoire, nous avons pensé à consulter le beau mémoire de M. Laplace, sur les probabilités, inséré dans le *Recueil de l'académie des sciences de Paris*, pour l'année 1778 ; et nous avons vu que le problème était en effet résolu par ce profond mathématicien (*). Cependant, nous n'avons pas cru devoir supprimer notre travail. La solution de Laplace diffère de la nôtre par sa marche ; elle est fondée sur la méthode des équations aux différences finies. Il n'est pas inutile de voir un même sujet traité par des procédés différens ; et il est tout au moins agréable à ceux qui ne sont pas exercés aux méthodes générales, de voir ramenées aux élémens des questions qui paraissaient surpasser leur portée.

(*) Ce problème a été indiqué aux Rédacteurs des *Annales*, par un de leurs correspondans ; et ce n'est que par M. Lhuilier qu'ils ont appris qu'il avait déjà été résolu.

Le mémoire de M. Laplace, qui en contient la solution, commence à la page 227 du volume de l'académie pour 1778, et cette solution se trouve à la page 231. L'auteur ne s'en occupe, au surplus, que par occasion, et seulement pour montrer combien l'inégalité d'adresse des deux joueurs influe sur leur situation, lors même que cette inégalité n'est que soupçonnée, sans qu'on sache quelle en est la quantité ni quel est le plus adroit des deux.

M. Laplace remarque, à ce sujet, que si, dans le cas d'une parfaite égalité d'adresse, les deux joueurs peuvent doubler, tripler, etc., le nombre de leurs jetons respectifs sans changer leur situation, il n'en est plus de même, dès qu'il y a entre eux la plus légère inégalité ; c'est aussi ce qui résulte des formules ci-dessus.

(*Note des éditeurs.*)

Troisième solution ;

Par M. TÉDENAT, correspondant de la première classe de l'Institut, recteur de l'académie de Nismes.

Soient A et B les deux joueurs, m et n leurs adresses respectives, p et q le nombre des jetons qu'ils ont chacun.

Soient, dans un état quelconque du jeu, x le nombre des jetons de A et Z_x son espérance; au coup suivant, cette espérance deviendra Z_{x+1} ou Z_{x-1} ; or, la probabilité qu'elle deviendra Z_{x+1} est $\frac{m}{m+n}$, et la probabilité qu'elle deviendra Z_{x-1} est $\frac{n}{m+n}$. On aura donc, en vertu d'un principe connu (*),

$$Z_x=\frac{m}{m+n}Z_{x+1}+\frac{n}{m+n}Z_{x-1}\ ,$$

ou

$$mZ_{x+1}-(m+n)Z_x+nZ_{x-1}=0\ ;$$

équation linéaire du second ordre, aux différences finies, entre les deux variables x et Z.

Pour l'intégrer, nous ferons usage de la méthode donnée par M. Lagrange, dans les *Mémoires de l'académie de Berlin*, pour 1775 (**).

Posant donc

$$Z_x=a^x\ ,\quad \text{d'où}\quad Z_{x+1}=a^{x+1}\ ,\quad Z_{x-1}=a^{x-1}\ ;$$

il viendra, en substituant, et divisant par a^{x-1} ;

$$ma^2-(m+n)a+n=0\ ,$$

(*) Voyez ci-dessus page 341.

(**) Voyez aussi le *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* de M. Lacroix, deuxième édition, pages 575 et suivantes.

(*Notes des éditeurs.*)

ou encore

$$(m\alpha-n)(\alpha-1)=0\ ;$$

ce qui donne pour α ces deux valeurs

$$\alpha=1\ ,\quad \alpha=\frac{n}{m}$$

d'où on conclura

$$\alpha^x=1\ ,\quad \alpha^x=\left(\frac{n}{m}\right)^x$$

et par conséquent

$$Z_x=G+H\left(\frac{n}{m}\right)^x\ ,$$

G et H étant des constantes arbitraires.

Pour déterminer ces constantes, nous remarquerons 1.° que, si A n'avait plus aucun jeton, son espérance serait absolument nulle, puisque la partie se trouverait terminée au profit de B ; 2.° qu'au contraire s'il avait $p+q$ jetons ; son espérance se trouverait changée en certitude, puisque la partie se trouverait terminée à son profit. On voit donc que

à $x=0$ doit répondre $Z_x=0$,
à $x=p+q$ doit répondre $Z_x=1$,

ce qui donne les deux équations

$$0=G+H\ ,\quad 1=G+H\left(\frac{n}{m}\right)^{p+q}\ ;$$

d'où

$$G=\frac{m^{p+q}}{m^{p+q}-n^{p+q}}\ ,\quad H=-\frac{m^{p+q}}{m^{p+q}-n^{p+q}}\ ;$$

substituant donc dans la valeur de Z_x, elle deviendra

$$Z_x=\frac{m^x-n^x}{m^{p+q}-n^{p+q}}\cdot m^{p+q-x}\ ;$$

or, lorsque A a x jetons, B en a $p+q-x$; désignant donc par y le nombre de jetons de B lorsque A en a x, on pourra écrire

$$Z_x=\frac{m^y(m^x-n^x)}{m^{p+q}-n^{p+q}}.$$

Si l'on désigne par Z_y l'espérance correspondante de B, on aura pareillement

$$Z_y=\frac{n^x(m^y-n^y)}{m^{p+q}-n^{p+q}}.$$

Telles sont donc les espérances respectives de A et B, lorsque le premier a x jetons et le second y ; si donc on désigne simplement par X et Y leurs espérances respectives, lorsque le premier a p jetons et le second q, ainsi que la question le suppose, on aura

$$X=\frac{m^q(m^p-n^p)}{m^{p+q}-n^{p+q}}, \quad Y=\frac{n^p(m^q-n^q)}{m^{p+q}-n^{p+q}}.$$

Dans le cas particulier où l'on a $n=m$, ces valeurs semblent devenir $\frac{0}{0}$; mais, si on les réduit d'abord à leur plus simple expression, on a pour ce cas

$$X=\frac{p}{p+q}, \quad Y=\frac{q}{p+q};$$

comme on pouvait bien le prévoir.

Les résultats auxquels nous venons de parvenir servent à résoudre, non seulement la question proposée, mais encore les deux questions suivantes :

1.° *Quelles doivent être les adresses respectives des deux joueurs, pour qu'en leur distribuant un nombre de jetons donné d'une manière déterminée, leurs espérances respectives soient proportionnelles à des nombres donnés ?*

2.° *Les adresses respectives des deux joueurs étant connues, de quelle manière faut-il répartir entre eux un nombre de jetons donné, pour que leurs espérances respectives soient proportionnelles à des nombres donnés ?*

Nous allons donner un exemple de chacune de ces deux questions.

Exemple I. On donne 4 jetons à A et 2 à B ; quelles doivent être leurs adresses respectives pour que l'espérance de A soit à celle de B comme 850 est à 81 ?

On a ici $X=\frac{850}{850+81}=\frac{850}{931}$; on a de plus $p=4$, $q=2$, et $p+q=6$; donc

$$\frac{850}{931}=\frac{m^2(m^4-n^4)}{m^6-n^6}=\frac{m^2(m^2+n^2)}{m^4+m^2n^2+n^4}\ ;$$

ou, en chassant les dénominateurs, transposant, réduisant et divisant par n^4,

$$81\left(\frac{m}{n}\right)^4+81\left(\frac{m}{n}\right)^2-850=0\ .$$

Cette équation donne d'abord

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=\frac{-81\pm531}{162}\ ;$$

rejetant la racine négative qui rendrait $\frac{m}{n}$ imaginaire, il vient

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=\frac{25}{9}\quad \text{d'où}\quad \frac{m}{n}=\frac{5}{3}\ ,$$

ainsi l'adresse de A doit être à celle de B dans le rapport de 5 à 3.

Exemple II. L'adresse de A étant à celle de B dans le rapport de 3 à 2, de quelle manière faut-il répartir 5 jetons entre eux pour que leurs espérances soient dans le rapport de 135 à 76 ?

On a ici $X=\frac{135}{135+76}=\frac{135}{211}$, $m=3$, $n=2$, $p+q=5$, d'où $q=5-p$; donc

$$\frac{135}{211}=\frac{3^{5-p}(3^p-2^p)}{3^5-2^5}=\frac{3^5-2^p.3^{5-p}}{211}\ ,$$

ou

$$135=243-243.\left(\frac{2}{3}\right)^p\ ,$$

d'où

$$\left(\frac{2}{3}\right)^p=\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

donc $p=2$ et conséquemment $q=3$; ainsi il faut donner 2 jetons à A et 3 à B.

Quant à la question proposée dans la note de la page 224 de ce volume, sa résolution complette exigerait une discussion dans laquelle nous n'avons pas actuellement le loisir de nous engager. (*)

Nous nous bornerons donc à remarquer que, x désignant toujours le nombre des jetons de A, à un coup quelconque, et t exprimant le nombre des coups qu'il reste encore à jouer, pour que la partie finisse; si l'on représente par $Z_{x,t}$ la probabilité que la partie finira précisément après ce nombre de coups, cette probabilité, au coup suivant, deviendra $Z_{x+1,t-1}$ ou $Z_{x-1,t-1}$; or, la probabilité qu'elle prendra la première de ces deux valeurs est $\frac{m}{m+n}$, et la probabilité qu'elle prendra la seconde est $\frac{n}{m+n}$; on doit donc avoir

$$Z_{x,t}=\frac{m}{m+n}Z_{x+1,t-1}+\frac{n}{m+n}Z_{x-1,t-1};$$

équation du second ordre aux différences finies et partielles entre les deux variables indépendantes x, t et leur fonction Z. En posant, pour abréger,

$$m=M(m+n), \quad n=N(m+n),$$

elle devient

$$Z_{x,t}=MZ_{x+1,t-1}+NZ_{x-1,t-1}; \qquad (\Delta)$$

Pour intégrer cette équation, on peut encore faire usage de la

(*) Ce problème a été aussi traité par M. Laplace: voyez les *Mémoires des Savans étrangers*; tome VII, page 153.

(*Note des éditeurs.*)

méthode de M. Lagrange déjà indiquée (*). Posant donc

$Z_{x,t}=a\alpha^x\beta^t$, d'où $Z_{x+1,t-1}=a\alpha^{x+1}\beta^{t-1}$, $Z_{x-1,t-1}=a\alpha^{x-1}\beta^{t-1}$,

il viendra, en substituant, divisant par $a\alpha^{x-1}\beta^{t-1}$ et transposant,

$$M\alpha^2-\beta\alpha+N=0,$$

cette équation étant successivement résolue par rapport à α et à β donne

$$\alpha=\frac{\beta\pm\sqrt{\beta^2-4MN}}{2M}, \quad \beta=\frac{M\alpha^2+N}{\alpha};$$

de là, en développant en série,

$$\alpha^x=\frac{1}{M^x}\left\{\beta^x-\frac{x}{1}MN\beta^{x-2}+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-3}{2}M^2N^2\beta^{x-4}-\ldots\ldots\right\}$$

$$\beta^t=M^t\alpha^t+\frac{t}{1}M^{t-1}N\alpha^{t-2}+\frac{t}{1}\cdot\frac{t-1}{2}M^{t-2}N^2\alpha^{t-4}+\ldots\ldots;$$

donc

$$Z_{x,t}=\frac{a}{M^x}\left\{\beta^{x+t}-\frac{x}{1}MN\beta^{x+t-2}+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-3}{2}M^2N^2\beta^{x+t-4}-\ldots\right\},$$

$$Z_{x,t}=a\left\{M^t\alpha^{x+t}+\frac{t}{1}M^{t-1}N\alpha^{x+t-2}+\frac{t}{1}\cdot\frac{t-1}{2}M^{t-2}N^2\alpha^{x+t-4}+\ldots\right\};$$

or, on sait qu'à ces valeurs on peut substituer celles-ci

$$Z_{x,t}=\frac{1}{M^x}\varphi(x+t)-\frac{x}{1}\frac{N}{M^{x-1}}\varphi(x+t-2)+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-3}{2}\frac{N^2}{M^{x-2}}\varphi(x+t-4)-\ldots,$$

$$Z_{x,t}=M^t\psi(x+t)+\frac{t}{1}M^{t-1}N\psi(x+t-2)+\frac{t}{1}\cdot\frac{t-1}{2}M^{t-2}N^2\psi(x+t-4)+\ldots,$$

puis encore celles-ci

$$Z_{x,t}=\frac{1}{M^x}Z_{0,x+t}-\frac{x}{1}\frac{N}{M^{x-1}}Z_{0,x+t-2}+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-3}{2}\frac{N^2}{M^{x-2}}Z_{0,x+t-4}-\ldots,$$

(*) Voyez le *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* de M. Lacroix; tome III.e, page 248, n.o 1012.

(*Note des éditeurs.*)

$$Z_{x,t}=M^tZ_{x+t,0}+\frac{t}{1}M^{t-1}NZ_{x+t-2,0}+\frac{t}{1}\cdot\frac{t-1}{2}M^{t-2}N^2Z_{x+t-4,0}+\ldots;$$

voilà donc deux intégrales de l'équation (Δ), et il est même aisé de s'assurer, *a priori*, qu'elles la rendent identique; mais on voit qu'elles supposent que l'on connaisse l'une ou l'autre des premières bandes horizontale ou verticale de la table à double entrée dont cette équation exprime la loi.

QUESTION PROPOSÉE.

Problème d'Arithmétique.

Deux suites composées chacune de n nombres positifs et inégaux étant données; comment faut-il disposer entre eux les nombres de ces deux suites, pour que la somme des produits des termes de la première par les termes correspondans de la seconde soit la plus grande ou la plus petite possible?

Comment faut-il disposer entre eux les nombres de ces deux suites, pour que la somme des quotiens des termes de la première par leurs correspondans dans la seconde soit la plus grande ou la plus petite possible? (*)

(*) On pourrait supposer que les $2n$ nombres donnés ne sont pas, à l'avance, partagés en deux suites, et demander d'en faire le partage de manière à obtenir le *maximum* ou le *minimum* absolu pour la somme des produits ou des quotiens des termes de la première suite par leurs correspondans dans la seconde.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Relation entre le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers inscrits à une même sphère ;

Par M. Flaugergues, astronome, correspondant de la première classe de l'institut.



Théorème. Soit AB (fig. 1) une ligne coupée en moyenne et extrême raison au point C (AC étant la médiane). Je dis que l'angle solide du dodécaèdre est à l'angle solide de l'icosaèdre (*) comme $(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2)^{\frac{5}{2}}$ est à $15.\overline{AB}^4(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)^{\frac{1}{2}}$; ces deux corps étant supposés inscriptibles à la même sphère (**).

Démonstration I. Imaginons (fig. 2) trois pyramides dont le sommet commun soit au centre D de la sphère, qui aient pour bases trois faces contiguës à un angle solide du dodécaèdre inscrit, et qui soient par conséquent égales au quart de ce solide. Ayant tiré les lignes FE, EG, GF, imaginons des plans qui passent par

(*) L'auteur entend ici par *angle solide* d'un polyèdre régulier, la portion de ce polyèdre détachée par un plan passant par les extrémités de celles de ses arêtes qui concourent à un même sommet ; portion qui est conséquemment une pyramide régulière.

(**) Si l'on prend AB pour unité on aura $AC=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, $BC=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$; et la proposition de M. Flaugergues reviendra à dire que l'angle solide du dodécaèdre est à l'angle solide de l'icosaèdre comme $\sqrt{25-11\sqrt{5}}$ est à $3\sqrt{3(3-\sqrt{5})}$.

(*Notes des éditeurs.*)

ces lignes et par le centre D ; on aura trois pyramides triangulaires, et chacune de ces pyramides étant à la pyramide pentagonale comme le triangle EHF est au pentagone FHEIK, le solide formé par ces trois pyramides réunies, et qui est composé de deux pyramides opposées qui ont pour base commune le triangle FEG, et dont les axes sont sur le rayon DH perpendiculaire à cette base, est au quart du dodécaèdre dans la même raison.

Cela posé, nommons P la surface du pentagone FHEIK ; nommons S la solidité de la pyramide ou de l'angle solide HGEF ; nommons *s* la solidité de la pyramide DGEF ; nommons enfin D la solidité du dodécaèdre et *a* le diamètre de la sphère circonscrite. Du centre L du pentagone FHEIK ayant tiré les rayons LE, LF, LH, le dernier coupant EF en M, on aura

$$LM : MH :: ELF : EHF \ ;$$

donc, *componendo*

$$LH : MH :: LEHF\left(=\tfrac{2}{5}P\right) : EHF = \frac{2MH}{5LH}.P \ ;$$

mais, par la propriété du cercle,

$$\div 2HL : HE : HM = \frac{\overline{HE}^2}{2LH} \ ;$$

donc

$$EHF = \frac{\overline{HE}^2}{5\overline{LH}^2}.P \ ;$$

puis donc que

$$HEIKF : EHF :: \tfrac{1}{4}D : S+s \ :$$

on aura

$$P : \frac{\overline{HE}^2}{5\overline{LH}^2}.P :: \tfrac{1}{4}D : S+s = \frac{\overline{HE}^2}{20\overline{LH}^2}D \ .$$

Soit présentement abaissée du point E, dans le plan FGE, la

perpendiculaire EN sur DH ; puisque la ligne HE est inscrite à la sphère, on aura

$$\div a : \mathrm{HE} : \mathrm{HN} = \frac{\overline{\mathrm{HE}}^2}{a};$$

de plus

$$\mathrm{DN} : \mathrm{HN} :: s : \mathrm{S};$$

donc, *componendo*

$$\mathrm{DH}(=\tfrac{1}{2}a) : \mathrm{HN}\left(=\frac{\overline{\mathrm{HE}}^2}{a}\right) :: \mathrm{S}+s\left(=\frac{\overline{\mathrm{HE}}^2}{2\mathrm{o}\overline{\mathrm{LH}}^2}.\mathrm{D}\right) : \mathrm{S} = \frac{\overline{\mathrm{HE}}^4}{10a^2.\overline{\mathrm{LH}}^2}.\mathrm{D};$$

II. Imaginons (fig. 3) cinq pyramides qui aient leur sommet commun au centre D′ de la sphère, pour bases les faces contiguës de l'icosaèdre inscrit, et qui soient par conséquent égales au quart de ce solide. Ces pyramides formeront, par leur réunion un solide TOPQRSD′ composé de deux pyramides opposées qui ont pour base commune le pentagone OPQRS, et dont les axes sont sur le rayon D′T perpendiculaire à cette base.

Cela posé, nommons I la solidité de l'icosaèdre, S′ celle de la pyramide ou de l'angle solide TOPQRS, et s' celle de la pyramide D′OPQRS ; ayant tiré, dans le plan OPQRS, la perpendiculaire OV sur D′T, et désignant toujours par a le diamètre de la sphère ; la corde inscrite TO donnera

$$\div a : \mathrm{OT} : \mathrm{TV} = \frac{\overline{\mathrm{OT}}^2}{a},$$

mais on a

$$\mathrm{D'V} : \mathrm{VT} :: s' : \mathrm{S'},$$

d'où, *componendo*

$$\mathrm{D'T}(=\tfrac{1}{2}a) : \mathrm{VT}\left(=\frac{\overline{\mathrm{OT}}^2}{a}\right) :: (\mathrm{S'}+s')(=\tfrac{1}{4}\mathrm{I}) : \mathrm{S'} = \frac{\overline{\mathrm{OT}}^2}{2a^2}.\mathrm{I}.$$

III. On a donc

$$S : S' :: \frac{\overline{HE}^4}{10a^2.\overline{LH}^2}.D : \frac{\overline{OT}^2}{2a^2}.I\ ;$$

c'est-à-dire,

$$S : S' :: \overline{HE}^4 \times D : 5\overline{LH}^2 \times \overline{OT}^2 \times I\ ;$$

mais 1.° (Euclide XIV. 7 et XIII. 18)

$$D : I :: \sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2} : \sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}\ ;$$

2.° (Euclide XIII, 12)

$$1 : \overline{OT}^2 :: 1 : 3\overline{LH}^2\ ;$$

3.° (Euclide XIII. 9. 10 et XIV. 11)

$$\overline{HE}^4 : \overline{LH}^4 :: \left(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2\right)^2 : \overline{AB}^4\ ;$$

multipliant toutes ces proportions par ordre, et simplifiant, il viendra

$$S : S' :: \left(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2\right)^{\frac{5}{2}} : 15\overline{AB}^4\left(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

C.Q.F.D. (*)

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

De la génération des lignes du second ordre, par l'intersection de deux lignes droites;

Par M. G. M. Raymond, principal du collége de Chambéri, membre de plusieurs sociétés savantes et littéraires.



La génération des courbes, par l'intersection de lignes droites, assujetties à certaines conditions, a fixé plus d'une fois l'attention

(*) En suivant la marche tracée par M. Flaugergues, on démontrera que l'angle

des géomètres, à raison de l'intérêt que présente ce mode de construction, et des conséquences auxquelles il peut conduire. Je m'occupais d'un cas particulier de cette génération, pour les sections coniques, lorsque j'ai reçu le numéro des *Annales* pour février 1812, où M. Rochat (*) traite un objet qui a quelque analogie avec le mien.

Je vais indiquer ici la génération dont il s'agit, parce qu'elle me paraît propre à rendre raison, en particulier, de l'analogie remarquable et des différences respectives que l'ellipse et l'hyperbole présentent, dans quelques points de leur théorie.

Soient deux droites IM, I'M (fig. 4) assujetties à tourner autour des points fixes I et I', en faisant continuellement entre elles un angle variable IMI'; la nature de la courbe décrite par le point M, dépendra des conditions auxquelles on soumettra l'inclinaison respective des deux droites génératrices sur l'axe des x.

Pour plus de simplicité, j'établis l'origine des abscisses au point O, milieu de la distance II', et je suppose les coordonnées rectangulaires. Soit $OI=A$. Les droites IM et I'M auront respectivement pour équations

$$y=a(x-A)\quad,\qquad y=a'(x+A)\ ;$$

a, a' étant les tangentes trigonométriques de leurs inclinaisons respectives sur l'axe des x.

Si le produit aa' de ces tangentes est donné et constant, l'équation de la courbe décrite par le point M sera

$$y^2=aa'(x^2-A^2)\quad\text{ou}\quad y^2-aa'x^2=-aa'A^2\ ;\qquad\text{(E)}$$

et elle présentera deux cas, suivant que les facteurs a et a' seront de signes contraires ou de mêmes signes, c'est-à-dire, suivant que le produit aa' sera négatif ou positif.

---

solide du cube est à l'angle solide de l'octaèdre comme le côté d'un triangle équilatéral est au triple de sa hauteur, c'est-à-dire, comme 2 est à $3\sqrt{3}$.

(*) Voyez la page 225 de ce volume.

(*Notes des éditeurs.*)

Or, si les lignes génératrices sont constamment inclinées en sens contraire, le point décrivant M se trouvera toujours compris entre les perpendiculaires Tt et T$'t'$ menées à la droite II$'$ par les points I et I$'$; en sorte que ces perpendiculaires seront, dans le sens des x, les limites de la courbe qui sera entièrement comprise entre elles.

Posant donc, dans ce cas,

$$aa'=-\frac{B^2}{A^2},$$

B étant une nouvelle ligne, dont la valeur est donnée par la formule

$$B=A\sqrt{-aa'},$$

l'équation deviendra

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2;$$

c'est-à-dire, celle d'une ellipse dont les axes sont $2A$ et $2B$.

Si, en particulier, on avait $aa'=-1$, il viendrait $B=A$; et l'ellipse deviendrait un cercle, ce qui est d'ailleurs évident, puisque la condition $aa'=-1$ ou $1+aa'=0$ étant celle de la perpendicularité des deux génératrices, l'angle M devrait constamment être droit.

Suivant qu'on aura

$$-aa'<1 \quad \text{ou} \quad -aa'>1,$$

c'est-à-dire, suivant que l'angle M sera obtus ou aigu, on aura

$$\frac{B^2}{A^2}<1 \quad \text{ou} \quad \frac{B^2}{A^2}>1,$$

c'est-à-dire,

$$B<A \quad \text{ou} \quad B>A;$$

l'ellipse sera donc décrite sur son grand axe dans le premier cas et sur son petit axe dans le second.

La droite I$'$M s'inclinant de plus en plus, viendra enfin coïncider avec I$'$I; alors, a' devenant zéro, a devra devenir infini, c'est-à-dire, qu'alors IM se confondra avec Tt; ainsi I est un point de la courbe, et on en dirait autant de I$'$.

Si présentement on suppose, au contraire, que le produit constant aa' soit positif ou, ce qui revient au même, que les deux facteurs a et a' soient constamment de mêmes signes ; les droites IM et I′M se trouvant constamment inclinées dans le même sens, leur point de concours M′ se trouvera toujours hors des parallèles Tt et T′t' qui conséquemment seront encore dans ce cas les limites de la courbe, mais de manière que cette courbe, qui d'ailleurs passera toujours par les points I, I′, n'aura aucun de ses points compris entre elles.

Posant alors

$$aa'=\frac{B^2}{A^2},$$

en sorte qu'on ait

$$B=A\sqrt{aa'},$$

l'équation (E) deviendra

$$B^2x^2-A^2y^2=A^2B^2,$$

qui est celle d'une hyperbole dont le premier et le second axe sont $2A$ et $2B$.

Si l'on avait $aa'=1$, il en résulterait $B=A$, et l'hyperbole serait équilatérale.

Si, sans statuer sur le signe de aa', dans l'équation (E), on y fait

$$-aa'=\frac{B^2}{A^2} \quad \text{d'où} \quad B=\pm A\sqrt{-aa'},$$

cette valeur de B sera réelle ou imaginaire, suivant que aa' sera négatif ou positif ; ce qui explique pourquoi *le demi-axe des* y *étant exprimé par* B *dans l'ellipse, il se change en* $B\sqrt{-1}$ *dans l'hyperbole, et réciproquement.*

La longueur de A étant déterminée, pour une ellipse ou une hyperbole, on voit que la longueur de B dépendra du produit aa', et que, pour obtenir l'une ou l'autre courbe, il suffit de faire ce produit constant, en lui assignant d'ailleurs, pour chaque cas, une

valeur arbitraire. De là la raison pourquoi *on peut établir*, *sur un même premier axe*, *une infinité d'ellipses ou d'hyperboles qui ne diffèrent que par leur second axe.*

Il est presque superflu d'observer que, si l'on établissait les lignes génératrices LN, L'N sur le second axe, et qu'on les assujettit à la condition $aa'=-\frac{A^2}{B^2}$, le point N d'intersection circulerait sur la même ellipse, en dedans des perpendiculaires Zz, Z'z' menées à LL' par ses extrémités; mais qu'aussitôt qu'on supposerait $aa'=\frac{A^2}{B^2}$, le point N' sortirait de ces limites, pour décrire l'hyperbole conjuguée de la première.

Menons maintenant, dans l'ellipse, les diamètres G*g* et H*h*, respectivement parallèles aux génératrices MI' et MI, et les coupant en R et S; à cause des parallèles, puisque O est le milieu de II', les points R et S seront les milieux respectifs de MI et MI'; les deux diamètres G*g* et H*h* seront donc conjugués l'un de l'autre. Les mêmes considérations s'appliquent à l'hyperbole; et de là cette propriété commune aux deux courbes que *deux cordes supplémentaires, soit de l'ellipse soit de l'hyperbole, indiquent, par leurs directions, un système de diamètres conjugués.*

La tangente de l'angle M est, en général,

$$\frac{a'-a}{1+aa'},$$

si l'on y met pour aa' la valeur $-\frac{B^2}{A^2}$ qui répond à l'ellipse, on aura

$$\text{Tang.M}=\frac{A^2(a'-a)}{A^2-B^2}, \qquad (P)$$

le *minimum* et le *maximum* de cette valeur correspondent respectivement au *maximum* et au *minimum* de l'angle des deux droites génératrices, lorsque cet angle est obtus, c'est-à-dire, lorsque l'ellipse est construite sur son grand axe. Or, si a et a' étaient numériquement

ment égaux, à cause des signes contraires de ces deux nombres, cette valeur deviendrait,

$$\text{Tang.M}=\frac{2aA^2}{A^2-B^2},$$

ou, à cause de $a=\frac{B}{A}$,

$$\text{Tang.M}=\frac{2AB}{A^2-B^2}; \qquad (P')$$

quantité plus petite que la valeur (P), tant que a et a' ne seront pas égaux. (*)

Ainsi, dans l'ellipse, *le* maximum *de l'angle formé par les diamètres conjugués est l'angle formé par les diamètres conjugués égaux.*

Si l'on avait $B>A$, la valeur (P') ne ferait simplement que changer de signe; ainsi *l'angle formé par les cordes supplémentaires établies aux extrémités du petit axe de l'ellipse est supplément de l'angle des cordes supplémentaires établies aux extrémités de son grand axe.*

Soient menées les ordonnées GP, HQ des points G, H. Faisons d'abord

$$OP=x, \qquad GP=y;$$

l'équation du diamètre OG sera

$$y=a'x, \quad \text{d'où} \quad y^2=a'^2x^2.$$

Mettant cette valeur dans l'équation (E), il viendra

$$x^2=\frac{aA^2}{a-a'}, \quad \text{d'où} \quad y^2=\frac{a'^2aA^2}{a-a'},$$

(*) Car, en général, de $pq=m^2$, résulte nécessairement $2m<p+q$. On a, en effet, $0<(p-q)^2$, ou $4pq<(p-q)^2+4pq$, ou $4pq<(p+q)^2$, ou $4m^2<(p+q)^2$, ce qui donne $2m<p+q$.

Si l'on égale à zéro la différentielle de l'expression (P) il viendra $da'=da$; mais, d'un autre côté, à cause de aa' constant, on a $ada'+a'da=0$; ce qui donne, en ayant égard à la différence des signes de a et a', $a'=a$ comme ci-dessus.

donc

$$\overline{OG}^2=x^2+y^2=\frac{aA^2+a'^2aA^2}{a-a'}.$$

Par un semblable calcul on trouvera

$$\overline{OH}^2=\frac{-a'A^2-a^2a'A^2}{a-a'},$$

et de là

$$\overline{OG}^2+\overline{OH}^2=(1-aa')A^2;$$

désignant donc par A', B' les demi-diamètres conjugués OG, OH, et se rappelant que $-aa'A^2=B^2$, il viendra

$$A'^2+B'^2=A^2+B^2;$$

c'est-à-dire, que *la somme des quarrés des demi-diamètres conjugués de l'ellipse est une quantité constante.*

Comme le calcul est absolument le même pour l'hyperbole, sauf le signe du produit aa', on trouvera, en tenant compte de cette différence, que *la différence des quarrés des demi-diamètres conjugués de l'hyperbole est une quantité constante.*

Le calcul précédent donne

$$A'=A\sqrt{\frac{(1+a'^2)a}{a-a'}}, \quad B'=A\sqrt{-\frac{(1+a^2)a'}{a-a'}};$$

or, en désignant par φ l'angle des deux génératrices, lequel est aussi celui des demi-diamètres A', B', on a

$$\text{Sin.}\varphi=\frac{a-a'}{\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}};$$

de là

$$A'B'\text{Sin.}\varphi=A^2\sqrt{-aa'}=AB.$$

Le calcul étant exactement le même pour l'hyperbole, il en faut conclure que, *dans l'ellipse et dans l'hyperbole, les parallélogrammes construits sur les grandeurs et directions des diamètres conjugués sont tous équivalens.*

En prenant le produit aa' négativement pour l'ellipse et positivement pour l'hyperbole, on trouvera que l'expression de l'excentricite est

pour l'ellipse, $A\sqrt{1-aa'}$; pour l'hyperbole, $A\sqrt{1+aa'}$.

Et si l'on détermine, d'après ces expressions, celles des rayons vecteurs pour les deux courbes, on trouvera toutes leurs propriétés qui y sont relatives, et l'on verra également que la différence des propriétés de l'une et de l'autre tient à la différence de signes du produit aa', c'est-à-dire, à la différence de direction de l'une des droites génératrices. Il en est de même pour ce qui regarde les tangentes aux deux courbes.

Si l'on emploie l'équation (E) telle qu'elle est, sans changer le signe de aa', auquel cas elle exprimera une hyperbole, on pourra la mettre sous cette forme

$$y=\pm x\sqrt{aa'\left(1-\frac{A^2}{x^2}\right)},$$

qui annonce le caractère asymptotique de cette courbe; puisque son équation tend, de plus en plus, à se changer en celle-ci

$$y=\pm x\sqrt{aa'},$$

qui serait enfin

$$y=\pm ax,$$

si les droites génératrices devenaient parallèles. Pour s'assurer de ces résultats, il faut observer que l'abscisse du point de concours ayant pour expression

$$x=\frac{a+a'}{a-a'}A,$$

devient $x=\frac{2aA}{0}$, si l'on a $a'=a$, d'où $aa'=a^2$; ce qui fait évanouir la fraction $\frac{aa'A^2}{x^2}$.

Si l'origine des abscisses était au point I', les équations respectives des droites génératrices I'M et IM seraient

$$y=a'x\ ,\qquad y=a(x-2A)\ ;$$

supposant aa' négatif, et faisant

$$aa'=-\frac{B^2}{A^2}\ ,\quad \text{d'où}\quad -2aa'A=\frac{2B^2}{A}\ ,$$

l'équation de l'ellipse serait

$$y^2=\frac{2B^2}{A}x+aa'x^2.$$

La quantité $\frac{2B^2}{A}$ étant l'expression du paramètre de l'ellipse, en la désignant par P, il viendra

$$y^2=Px+aa'x^2.$$

La construction sera la même, quel que soit l'éloignement du point I; or, si l'on suppose que IM devienne parallèle à l'axe des x, on aura $a=0$, et l'équation deviendra simplement

$$y^2=Px\ ,$$

équation de la parabole. Or, comme on a

$$B=A\sqrt{-aa'}\ ,\quad \text{d'où}\quad A=\frac{B}{\sqrt{-aa'}}\ ,$$

la supposition de $a=0$ donnera $A=\infty$; ce qui exprime, en effet, comme l'on sait, le passage de l'ellipse à la parabole.

Quant à cette dernière courbe, nous pourrions nous en tenir à cette considération, qui fait dériver son équation d'une origine commune à celle des autres courbes. On pourrait aussi employer directement une construction analogue aux précédentes, en cherchant la courbe décrite par l'intersection de deux droites mobiles dont l'une est constamment parallèle à l'axe des x, pendant que l'autre passe constamment par un point de cet axe. Mais nous nous réservons de revenir sur ce qui concerne la parabole en particulier, par un autre méthode de laquelle nous déduirons, d'une manière plus lumineuse, les principales propriétés de cette courbe.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solutions du premier des deux problèmes de géométrie, proposé à la page 256 de ce volume ;

Par MM. Legrand, Rochat et Penjon. (*)



Avant d'en venir à la solution du problème proposé, MM. Legrand, professeur de mathématiques, et Rochat, professeur de navigation à Saint-Brieux, ont cru nécessaire d'établir d'abord un théorème préparatoire. Ce théorème, qui peut être considéré comme un des points fondamentaux de la *Géométrie de la règle*, a été énoncé par M. Legrand, ainsi qu'il suit :

THÉORÈME. Soit un quadrilatère complet quelconque, dont les côtés soient indéfiniment prolongés ; que ses trois diagonales soient aussi indéfiniment prolongées ; elles se couperont, deux à deux, en trois points. Par chacun de ces points soient menées des droites aux deux extrémités de la diagonale sur laquelle il ne se trouve pas, on aura ainsi six droites dont chacune déterminera deux points sur deux côtés du quadrilatère ; en sorte qu'on aura en tout douze de ces points, distribués, trois par trois, sur les quatre côtés de ce quadrilatère.

(*) M. Penjon a adressé aux Rédacteurs une solution du problème de la page 318 de ce volume ; mais cette solution est parvenue trop tard pour pouvoir être publiée avec les autres ; elle diffère peu, au surplus, de celle de M. Rochat.

(*Note des éditeurs.*)

Or, il arrivera que ces douze points se trouveront, deux à deux situés sur douze nouvelles droites, concourant quatre à quatre aux trois points d'intersection des diagonales du quadrilatère proposé.

Les démonstrations de ce théorème, données par MM. Legrand et Rochat, sont, l'une et l'autre, purement analitiques, et reviennent à peu près à ce qui suit.

Démonstration. Soit AA′A″B′BB″ (fig. 5) le quadrilatère proposé, dont les diagonales sont AB, A′B′, A″B″, se coupant, savoir: AB et A′B′ en C″, AB et A″B″ en C′, A′B′ et A″B″ en C. Soit joint le point C aux points A et B par deux droites dont la première coupe les côtés BA″, BA′ en n et q, et dont la seconde coupe les côtés AA″, AB′ en m et p. Comme la construction serait évidemment la même pour le point C′, relativement à la diagonale A′B′, et pour le point C″, relativement à la diagonale A″B″; il suffit de démontrer 1.° que les droites np et mq concourent au point C′; 2.° que les droites mn et qp concourent au point C″.

Soient prises A″A pour axe des x et A″B pour axe des y, et soient

$$A''A=a\ ,\quad A''A'=a'\ ,\quad A''B=b\ ,\quad A''B'=b'\ ;$$

on aura, d'après cela, pour les équations

du côté A B′ .... $ay+b'x=ab'$,
du côté A′B .... $a'y+bx=a'b$,
de la diagonale AB .... $ay+bx=ab$,
de la diagonale A′B′ .... $a'y+b'x=a'b'$;

en conséquence, les équations du point B″ seront

$$x=\frac{aa'(b-b')}{ab-a'b'}\ ,\quad y=\frac{bb'(a-a')}{ab-a'b'}\ ;$$

l'équation de la troisième diagonale A″B″ sera donc

$$aa'(b-b')y-bb'(a-a')x=0.$$

D'après cela on trouvera, pour les équations

du point C , $x=\frac{aa'(b-b')}{a(b-b')+b(a-a')}$, $y=\frac{bb'(a-a')}{a(b-b')+b(a-a')}$,

du point C′ , $x=\frac{aa'(b-b')}{a'(b-b')+b'(a-a')}$, $y=\frac{bb'(a-a')}{a'(b-b')+b'(a-a')}$,

du point C″ , $x=-\frac{aa'(b-b')}{ab'-a'b}$, $y=\frac{bb'(a-a')}{ab'-a'b}$;

on aura donc pour les équations

de CA , $a(2b-b')y+bb'x=abb'$,

de CB , $aa'y+b(2a-a')x=aa'b$;

d'après quoi on trouvera les équations des points m, n, p, q, ainsi qu'il suit

pour m $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{aa'}{2a-a'} \ ; \\ y=0 \ ; \end{array}\right.$ pour p $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{aa'(b-b')}{2ab-a'(b+b')} \ , \\ y=\frac{2bb'(a-a')}{2ab-a'(b+b')} \ ; \end{array}\right.$

pour n $\left\{\begin{array}{l} x=0 \ , \\ y=\frac{bb'}{2b-b'} \ ; \end{array}\right.$ pour q $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{2aa'(b-b')}{2ab-b'(a+a')} \ , \\ y=\frac{bb'(a-a')}{2ab-b'(a+a')} \ ; \end{array}\right.$

il est remarquable que la situation du point m est indépendante de celles des points B et B′ et que celle du point n est indépendante de celles des points A et A′.

D'après ces résultats, les équations des quatre droites mn, pq, mq, np, pourront être mises sous cette forme

pour mn , $\frac{aa'}{2a-a'}\left\{y-\frac{bb'(a-a')}{ab'-a'b}\right\}+\frac{bb'}{2b-b'}\left\{x+\frac{aa'(b-b')}{ab'-a'b}\right\}=0$,

pour pq , $\frac{aa'}{2a+a'}\left\{y-\frac{bb'(a-a')}{ab'-a'b}\right\}+\frac{bb'}{2b+b'}\left\{x+\frac{aa'(b-b')}{ab'-a'b}\right\}=0$,

pour np, $\frac{aa'}{2a-3a'}\left\{y-\frac{bb'(a-a')}{a'(b-b')+b'(a-a')}\right\}-\frac{bb'}{2b-b'}\left\{x-\frac{aa'(b-b')}{a'(b-b')+b'(a-a')}\right\}=0$,

pour mq, $\frac{aa'}{2a-a'}\left\{y-\frac{bb'(a-a')}{a'(b-b')+b'(a-a')}\right\}-\frac{bb'}{2b-b'}\left\{x-\frac{aa'(b-b')}{a'(b-b')+b'(a-a')}\right\}=0$;

or, on voit que les deux premières équations sont satisfaites par les coordonnées du point C″, et que les deux dernières le sont par les coordonnées du point C′.

Soient r, s, t, v les intersections de mn et CA″, de np et CB′, de pq et CB″, de mq et CA′ : ces quatre points étant situés par rapport au quadrilatère $mnpq$ de la même manière que le sont les quatre points m, n, p, q par rapport au quadrilatère A″A′B″B′, on en peut conclure, par ce qui précède, que les points r, s ainsi que les points v, t sont en ligne droite avec le point B, et que les points r, v ainsi que les points s, t sont en ligne droite avec le point A.

En général, en remarquant que la propriété qui est contenue dans l'énoncé du théorème appartient non seulement au quadrilatère proposé, mais encore à tous les quadrilatères que forment les lignes de la figure, prises quatre à quatre, on trouvera une multitude de points qui jouissent de la propriété d'être trois à trois sur une même ligne droite; et c'est une remarque qui a été faite également par MM. Legrand et Rochat.

Le théorème qui vient d'être démontré se déduit aisément de la proposition suivante :

Si par un point P, pris comme on le voudra sur le plan d'un angle quelconque ASB (fig. 6), on mène tant de droites qu'on voudra, coupant l'un des côtés de l'angle en A, A′, A″...., et l'autre en B, B′, B″,...., et que C, C′, C″...., soient les points d'intersection des diagonales des quadrilatères A″A′B′B″, A″ABB″, A′ABB′....; ces points C, C′, C″.... seront tous en ligne droite entre eux et avec le sommet S de l'angle dont il s'agit.

Cette dernière proposition se démontre facilement, en considérant que

que le quadrilatère A″ABB″ est toujours, pour une situation convenable de l'œil et du tableau, la perspective d'un rectangle A″ABB″ (fig. 7); que B′A′ (fig. 6), concourant au même point que BA et B″A″, doit être la perspective d'une parallèle B′A′ (fig. 7) à BA et B″A″; que conséquemment les points C, C′, C″ (fig. 6) doivent être les perspectives des centres C, C′, C″ (fig. 7) des rectangles A″A′B′B″, A″ABB″, A′ABB′; et que ces centres se trouvant sur une parallèle à AA″ et BB″, les perspectives de ces trois droites doivent concourir en un même point S. (fig. 6)

Ce tour de démonstration, outre son extrême brièveté, a encore l'avantage précieux de faire apercevoir sur-le-champ, dans la figure 6, une multitude de points qui doivent se trouver en ligne droite.

On pourrait aussi démontrer la même proposition en observant que, par une propriété connue des lignes du second ordre, et qui a été employée, avec avantage, par M. Rochat lui-même (*), cette proposition serait vraie, si l'on substituait une quelconque de ces lignes à l'angle ASB (fig. 6); et qu'ainsi elle doit avoir également lieu pour cet angle, puisque le système de deux droites est véritablement une ligne du second ordre.

M. Legrand remarque encore que, dans le cas particulier où les droites AB, A′B′, A″B″ (fig. 8), sont parallèles, elles sont toutes divisées en deux parties égales par la droite qui joint les points C, C′, C″.

La solution du problème proposé est une conséquence toute naturelle des considérations précédentes : voici à quoi elle se réduit.

PROBLÈME. On connaît dans un quadrilatère complet (fig. 9) deux côtés A″A, A″B, la diagonale AB qui joint leurs extrémités, et le point C d'intersection des deux autres diagonales; il faut, *avec la règle seulement*, achever le quadrilatère ?

Construction. Soient *m* le point de concours de A″A et BC, et *n* celui de A″B et AC; soit C″ le point de concours de AB et

(*) Voyez le tome 1.er des *Annales*, page 342.

mn ; Soient enfin B' et A' les intersections de A''B et A''A avec C''C ; les droites AB', BA' seront les deux autres côtés du quadrilatère cherché.

Cette construction est aussi celle qu'indique M. Penjon, professeur de mathématiques au lycée d'Angers, qui renvoie, pour sa démonstration, à la *Géométrie de position* de M. Carnot, et à son *Mémoire sur les transversales*. Il remarque que ce n'est que par pure élégance qu'on opère sur le point donné C, et qu'en lui substituant tout autre point de la droite A''C les points qu'on substituerait aux points m et n appartiendraient à une droite qui couperait le prolongement de AB au même point C'' où elle est coupée par mn. M. Penjon observe encore que, si le prolongement de A''C passe par le milieu de AB, mn se trouvant alors parallèle à cette dernière droite, le problème ne peut plus être résolu avec la règle seulement.

Solutions du dernier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 256 de ce volume.



ENONCÉ I. A un même triangle donné quelconque, on peut inscrire une infinité de systèmes de trois cercles dont les rayons soient proportionnels à des droites données, et dont chacun touche les deux autres et un côté du triangle donné.

On propose de construire le plus petit de ces systèmes ?

II. Au système de trois cercles donnés quelconques, se touchant deux à deux, on peut circonscrire une infinité de triangles semblables à un triangle donné, de manière que chaque côté du triangle touche un des cercles donnés.

On propose de construire le plus grand de ces triangles ?

Première solution ;

Par M. Bidone, professeur de mathématiques à l'académie de Turin.

Soit $AA'A''$ un triangle (fig. 10), et soient C, C', C'', les centres de trois cercles dont chacun touche les deux autres et un côté de ce triangle.

Je dis que, si le triangle $AA'A''$ est le plus grand, parmi tous ceux de son espèce, qui puisse être circonscrit au système des trois cercles dont les centres sont C, C', C'', ces cercles seront, à l'inverse, les plus petits de tous ceux qui, ayant leurs rayons dans le même rapport que les leurs, puissent être inscrits au triangle $AA'A''$, de manière que chacun d'eux touche les deux autres et un côté du triangle.

Si, en effet, on pouvait, sous les conditions données, inscrire au triangle $AA'A''$ trois cercles plus petits que ceux dont les centres sont C, C', C''; en faisant croître proportionnellement les dimensions de la figure, on parviendrait à rendre ces trois cercles égaux à ceux dont les centres sont C, C', C''; et alors le triangle, devenu plus grand que $AA'A''$ se trouverait circonscrit comme lui à ces trois cercles, ce qui est contre l'hypothèse.

Je dis, en second lieu, que réciproquement, si le système des cercles dont les centres sont C, C', C'' est le plus petit de tous ceux de même espèce qu'il soit possible d'inscrire, sous les conditions données, au triangle $AA'A''$, ce triangle sera, à l'inverse, le plus grand parmi tous ceux de son espèce, qu'il soit possible de circonscrire, sous les mêmes conditions, au système de ces trois cercles.

Si, en effet, on pouvait, sous les conditions données, circonscrire à ce système un triangle plus grand que $AA'A''$, en faisant décroître proportionnellement les dimensions de la figure, on parviendrait à rendre ce triangle égal à $AA'A''$, et alors le système des trois

cercles devenus plus petits, se trouverait comme celui des trois cercles dont les centres sont C, C′, C″, inscrit à ce triangle, ce qui est contre l'hypothèse.

Il résulte de ces considérations, et de ce que, sur une ligne donnée, on peut toujours construire une figure semblable à une figure donnée, que chacun des deux problèmes que présente la question proposée, peut, par de simples proportions, être ramené à l'autre. Or, comme un problème est réputé résolu, lorsqu'on en a ramené la solution à celle d'un autre problème qu'on sait résoudre, et comme d'ailleurs le dernier des deux problèmes proposés permet une construction facile, c'est le seul dont nous nous occuperons ici.

Soient donc (fig. 10) C, C′, C″ les centres de trois cercles donnés, se touchant deux à deux; et proposons-nous de circonscrire à leur système, un triangle donné d'espèce, dont chaque côté touche un de ces cercles, et qui soit le plus grand possible. Concevons que le problème soit résolu, et que le triangle cherché soit AA′A″. Par les centres C, C′, C″ soient menées les droites B′B″, B″B, BB′, respectivement parallèles à A′A″, A″A, AA′ et formant par leur concours le triangle BB′B″, semblable à AA′A″. Soient enfin joints les centres C, C′, C″ par des droites qui formeront un triangle CC′C″, inscrit à BB′B″.

Cela posé, je dis que le triangle BB′B″ est le plus grand de tous les triangles semblables à AA′A″ qu'il soit possible de circonscrire au triangle donné CC′C″. Si, en effet, il n'en était pas ainsi, on pourrait, au triangle CC′C″, circonscrire un triangle semblable à AA′A″ plus grand que BB′B″; et, en menant au cercle des tangentes parallèles aux côtés de ce dernier triangle, ces tangentes formeraient un nouveau triangle circonscrit aux trois cercles, semblable à AA′A″, et évidemment plus grand que lui; en sorte que, contrairement à l'hypothèse, ce dernier ne serait pas celui qui résout le problème.

Le dernier des deux problèmes proposés, et conséquemment le premier, se trouve donc ramené au suivant: *A un triangle donné*,

circonscrire un autre triangle, donné d'espèce, qui soit le plus grand possible?

Or, on sait résoudre ce problème (*), et on sait, de plus, qu'il n'admet qu'une solution, si l'on indique à quel côté du triangle donné doit répondre chacun des angles du triangle cherché, qu'il en a six dans le cas contraire, et qu'alors conséquemment il donne lieu à un *maximum-maximorum* qu'on obtiendra de la manière suivante; ainsi qu'il sera démontré plus loin.

Sur les côtés du triangle CC′C″, pris pour cordes, et extérieurement à ce triangle, soient décrits des arcs de cercles respectivement capables des angles donnés du triangle cherché BB′B″, de manière que l'arc capable du plus petit angle, réponde au plus grand des trois côtés du triangle donné CC′C″, et que l'arc capable du plus grand angle, réponde à son plus petit côté; menant alors, par les points C, C′, C″, des droites respectivement parallèles à celles qui joignent les centres de ces arcs, ces droites formeront, par leur rencontre, le triangle cherché BB′B″.

Pour achever la solution du dernier des deux problèmes proposés, il suffira donc de mener aux cercles donnés des tangentes respectivement parallèles aux côtés du triangle BB′B″; ces droites formeront, par leur rencontre, le triangle demandé AA′A″.

Si c'est, au contraire, le premier problème qu'on veut résoudre, on décrira d'abord arbitrairement trois cercles, se touchant deux à deux, et ayant leurs rayons dans le rapport des droites données. On circonscrira ensuite, par ce qui vient d'être dit, au système de ces trois cercles, un triangle semblable au triangle donné, et le plus grand possible. Construisant enfin une figure semblable à celle qu'on aura obtenue, mais dans laquelle le triangle circonscrit soit égal au triangle donné, le problème se trouvera résolu.

Dans le cas où les rayons des trois cercles donnés ou cherchés doivent être égaux, et dans celui où le triangle donné ou cherché

(*) Voyez les pages 88 et suivantes de ce volume.

doit être équilatéral, il n'y a plus lieu au *maximum-maximorum*, ni au *minimum-minimorum*; parce que les six solutions du problème se réduisent alors à une solution unique.

Il reste à prouver qu'en construisant de la manière qui vient d'être indiquée, on obtient, en effet, le *minimum-minimorum*, pour le premier problème, et conséquemment le *maximum-maximorum* pour le second.

Soit CC'C'' (fig. 11) un triangle donné, dont les angles soient γ, γ', γ''; soient décrits, sur les côtés de ce triangle, pris pour cordes, et extérieurement, des arcs de cercles respectivement capables des trois angles β, β', β'' d'un triangle donné quelconque; soient D, D', D'' les centres de ces arcs, et soient joints ces points par des droites qui formeront le triangle DD'D''; soit enfin circonscrit au triangle CC'C'' un triangle BB'B'' dont les côtés soient respectivement parallèles à ceux du triangle DD'D''.

Soient joints CD', CD''; et des points D', D'' soient abaissées sur CC'' et CC' les perpendiculaires D'm' et D''m''; les points m' et m'' seront les milieux de ces droites; les angles m'D'C et m''D''C seront respectivement égaux aux angles β' et β''; et on aura de plus D'D'' moitié de B'B''. (*)

Nommant donc c, c', c'' les trois côtés du triangle CC'C'' et b, b', b'' ceux du triangle BB'B''; on aura, q étant le quadrans,

$$D'D''=\tfrac{1}{2}b\,,\quad \text{Ang.}D'CD''=[\gamma+(q-\beta')+(q-\beta'')]=\beta+\gamma\,,$$

$$CD'=\frac{c'}{2\text{Sin.}\beta'}\,,\quad CD''=\frac{c''}{2\text{Sin.}\beta''}\,.$$

Or, le triangle D'CD'' donne

$$\overline{D'D''}^2=\overline{CD'}^2-2CD'.CD''.\mathit{Cos}.D'CD''+\overline{CD''}^2\,;$$

substituant donc, il viendra

(*) Voyez la page 24 de ce volume.

$$\frac{b^2}{4}=\frac{c'^2}{4\text{Sin.}^2\beta'}-\frac{2c'c''}{4\text{Sin.}\beta'.\text{Sin.}\beta''}\text{Cos.}(\beta+\gamma)+\frac{c''^2}{4\text{Sin.}^2\beta''},$$

c'est-à-dire,

$$b^2=\frac{c'^2\text{Sin.}^2\beta''-2c'c''\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''\text{Cos.}(\beta+\gamma)+c''^2\text{Sin.}^2\beta'}{\text{Sin.}^2\beta'\text{Sin.}^2\beta''}.$$

Mais, en désignant par C l'aire du triangle $CC'C''$, on a

$$c'^2\text{Sin.}^2\beta''=c'^2\text{Sin.}\beta''\text{Sin.}(\beta+\beta')$$
$$=c'^2\text{Sin.}\beta\text{Cos.}\beta'\text{Sin.}\beta''+c'^2\text{Cos.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''\ ;$$
$$-2c'c''\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''\text{Cos.}(\beta+\gamma)=-2c'c''\text{Cos.}\beta.\text{Sin.}\beta'.\text{Sin.}\beta''.\text{Cos.}\gamma$$
$$+2c'c''.\text{Sin.}\gamma.\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''$$
$$=-2c'c''\text{Cos.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''\text{Cos.}\gamma+4C\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''\ ;$$
$$c''^2\text{Sin.}^2\beta'=c''^2\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}(\beta+\beta'')$$
$$=c''^2\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Cos.}\beta''+c''^2\text{Cos.}\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''\ ;$$

donc

$$c'^2\text{Sin.}^2\beta''-2c'c''\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''\text{Cos.}(\beta+\gamma)+c''^2\text{Sin.}^2\beta'$$
$$=c'^2\text{Sin.}\beta\text{Cos.}\beta'\text{Sin.}\beta''+c''^2\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Cos.}\beta''+(c'^2-2c'c''\text{Cos.}\gamma+c''^2)\text{Cos.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''$$
$$+4C\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''$$
$$=c^2\text{Cos.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''+c'^2\text{Sin.}\beta\text{Cos.}\beta'\text{Sin.}\beta''+c''^2\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Cos.}\beta''+4C\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''.$$

Posant donc

$$M^2=\left\{\begin{array}{l} c^2\text{Cos.}\beta\ \text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta'' \\ +c'^2\text{Sin.}\beta\ \text{Cos.}\beta'\text{Sin.}\beta''+4C\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta'' \\ +c''^2\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Cos.}\beta'' \end{array}\right.,$$

il viendra

$$b=\frac{M}{\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''},\quad b'=\frac{M}{\text{Sin.}\beta''\text{Sin.}\beta},\quad b''=\frac{M}{\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'},$$

Si l'on désigne par B l'aire du triangle $BB'B''$, on aura

$$B=\frac{bb'\text{Sin.}\beta''}{2}=\frac{M^2}{2\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\beta'\text{Sin.}\beta''},$$

et par conséquent

$$B=2C+\frac{c^2\text{Cos}.\beta\text{Sin}.\beta'\text{Sin}.\beta''+c'^2\text{Sin}.\beta\text{Cos}.\beta'\text{Sin}.\beta''+c''^2\text{Sin}.\beta\text{Sin}.\beta'\text{Cos}.\beta''}{2\text{Sin}.\beta\text{Sin}.\beta'\text{Sin}.\beta''}.$$

Présentement pour que ce triangle soit un *maximum* absolu, il faut qu'on ne puisse faire subir aux angles β, β', β'' aucune permutation sans en diminuer la surface ; il faut donc qu'on ait

$$2C+\frac{c^2\text{Cos}.\beta\text{Sin}.\beta'\text{Sin}.\beta''+c'^2\text{Sin}.\beta\text{Cos}.\beta'\text{Sin}\,\beta''+c''^2\text{Sin}.\beta\text{Sin}.\beta'\text{Cos}.\beta''}{2\text{Sin}.\beta\text{Sin}.\beta'\text{Sin}.\beta''}$$

$$>2C+\frac{c^2\text{Cos}.\beta\text{Sin}.\beta''\text{Sin}\,\beta'+c'^2\text{Sin}.\beta\text{Cos}.\beta''\text{Sin}.\beta'+c''^2\text{Sin}.\beta\text{Sin}.\beta''\text{Cos}.\beta'}{2\text{Sin}\,\beta\text{Sin}.\beta''\text{Sin}.\beta'};$$

inégalité qui, en remarquant que $\text{Sin}.\beta$, $\text{Sin}.\beta'$, $\text{Sin}.\beta''$ sont essentiellement positifs, devient, en transposant, réduisant et chassant le dénominateur,

$$(c'^2-c''^2)\text{Sin}.(\beta''-\beta')>0\ ;$$

il faut donc que

$$c'-c'' \quad \text{et} \quad \beta''-\beta',$$

soient de mêmes signes, ou qu'en supposant $c'>c''$ on ait $\beta'<\beta''$; ainsi l'angle β étant déterminé à correspondre au côté C, il faut que le plus petit des deux autres angles corresponde au plus grand des deux autres côtés, *et vice versâ* ; d'où il est facile de conclure la construction indiquée ci-dessus.

Nous croyons devoir faire remarquer, en passant, que la valeur de B peut être mise sous cette forme très-simple

$$B=2C+\tfrac{1}{2}\{c^2\text{Cot}\beta+c'^2\text{Cot}.\beta'+c''^2\text{Cot}.\beta''\}.$$

Si l'on suppose, au contraire, donnés les côtés du triangle BB′B″ et les angles du triangle CC′C″, en posant, pour abréger

$$\text{N}^2=\left\{\begin{array}{l} b^2\text{Cos}.\gamma\text{Sin}.\gamma'\text{Sin}.\gamma'' \\ +b'^2\text{Sin}.\gamma\text{Cos}.\gamma'\text{Sin}.\gamma''+4B\text{Sin}.\gamma\text{Sin}.\gamma'\text{Sin}.\gamma'' \\ +b''^2\text{Sin}.\gamma\text{Sin}.\gamma'\text{Cos}.\gamma'' \end{array}\right.,$$

on trouvera

$$c=\frac{2B\text{Sin}.\gamma}{\text{N}},\quad c'=\frac{2B\text{Sin}.\gamma'}{\text{N}},\quad c''=\frac{2B\text{Sin}.\gamma''}{\text{N}},$$

d'où

d'où on conclura

$$C=\frac{2B^2}{b^2\text{Cot}.\gamma+b'^2\text{Cot}.\gamma'+b''^2\text{Cot}.\gamma''+4B}\;;$$

de cette valeur de C et de celle de B résulte cette relation remarquable

$$\frac{C}{B}=\frac{c^2\text{Cot}.\beta+c'^2\text{Cot}.\beta'+c''^2\text{Cot}.\beta''}{b^2\text{Cot}.\gamma+b'^2\text{Cot}.\gamma'+b''^2\text{Cot}.\gamma''}\,.$$

A l'aide de ce qui précède, on parviendra facilement aux résultats suivants.

I. Soient a, a', a'' les trois côtés d'un triangle donné, A son aire, λ, λ', λ'' des droites auxquelles les rayons des trois cercles inscrits doivent être proportionnels, et r, r', r'' ces rayons ; en posant, pour abréger,

$$Q^2=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}a^2[(\lambda+\lambda')^2+(\lambda+\lambda'')^2-(\lambda'+\lambda'')^2]\\+\frac{1}{2}a'^2[(\lambda+\lambda')^2+(\lambda'+\lambda'')^2-(\lambda+\lambda'')^2]+8A\sqrt{\lambda\lambda'\lambda''(\lambda+\lambda'+\lambda'')}\,,\\+\frac{1}{2}a''^2[(\lambda+\lambda'')^2+(\lambda'+\lambda'')^2-(\lambda+\lambda')^2]\end{array}\right.$$

il viendra

$$r=\frac{2\lambda A}{\lambda a+\lambda' a'+\lambda'' a''+Q}\,,$$

$$r'=\frac{2\lambda' A}{\lambda a+\lambda' a'+\lambda'' a''+Q}\,,$$

$$r''=\frac{2\lambda'' A}{\lambda a+\lambda' a'+\lambda'' a''+Q}\,.$$

II. Si au contraire, les rayons r, r', r'' des trois cercles étant donnés, on demande les côtés a, a', a'' du plus grand triangle circonscrit dont les angles soient α, α', α'' ; en posant, pour abréger,

$$P^2=\left\{\begin{array}{l}(r+r')^2\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.\alpha'\text{Cos}.\alpha''\\+(r'+r'')^2\text{Cos}.\alpha\text{Sin}.\alpha'\text{Sin}.\alpha''+4\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.\alpha'\text{Sin}.\alpha''\sqrt{rr'r''(r+r'+r'')}\,,\\+(r''+r)^2\text{Sin}.\alpha\text{Cos}.\alpha'\text{Sin}.\alpha''\end{array}\right.$$

on trouvera

$$a=\frac{r\text{Sin}.\alpha+r'\text{Sin}.\alpha'+r''\text{Sin}.\alpha''+P}{\text{Sin}.\alpha'\text{Sin}.\alpha''}\,,$$

$$a' = \frac{r\mathrm{Sin}.\alpha + r'\mathrm{Sin}.\alpha' + r''\mathrm{Sin}.\alpha'' + P}{\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Sin}.\alpha''},$$

$$a'' = \frac{r\mathrm{Sin}.\alpha + r'\mathrm{Sin}.\alpha' + r''\mathrm{Sin}.\alpha'' + P}{\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Sin}.\alpha'}.$$

Deuxième solution ;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

Lemme connu. Soit un triangle donné de grandeur et d'espèce. Par les sommets de ce triangle soient menées des droites qui forment un triangle circonscrit au premier. Que ce second triangle soit donné d'espèce seulement. On détermine, comme il suit, le plus grand de ces triangles.

Sur les côtés du premier triangle soient décrits (extérieurement à lui) des segmens de cercles respectivement capables des angles donnés du second triangle. Par chacun des sommets du premier triangle, soit menée une droite parallèle à la droite qui joint les centres des cercles dont les jambes de cet angle sont les cordes. Ces parallèles formeront le plus grand triangle demandé. (*)

PROBLÈME I. Soient trois cercles donnés de grandeur et de position, dont chacun touche les deux autres (extérieurement). Mener à chacun de ces cercles une tangente, de manière que le triangle formé par ces trois tangentes ait ses angles donnés, et soit le plus grand possible ?

Soient c, c', c'' les centres donnés de trois cercles qui se touchent extérieurement (fig. 12). Soient R, R', R'' leurs rayons donnés. Soient T, T', T'' les points de contact de ces trois cercles et des droites qui, par leur rencontre, forment un triangle XX'X'' dont les angles sont donnés et qui doit être le plus grand.

(*) Voyez les pages 27—32 de ce volume ; voyez aussi mes *Elémens d'analise géométrique*, etc., pages 252—255.

Analise. Le triangle $CC'C''$ est déterminé. Par les centres C, C', C'', soient menées aux côtés du triangle $XX'X''$ des parallèles; elles formeront un triangle $ZZ'Z''$ semblable au triangle $XX'X''$, et circonscrit au triangle $CC'C''$.

Des sommets..... Z, Z', Z'',
soient abaissées sur XX', XX'' ; $X'X''$, $X'X$; $X''X$, $X''X'$,
les perpendiculaires ZQ, ZP ; $Z'Q'$, $Z'P'$; $Z''Q''$, $Z''P''$.

Les quadrilatères $ZPXQ$, $Z'P'X'Q'$, $Z''P''X''Q''$ sont déterminées, puisque, dans chacun d'eux, on connaît, outre les angles, deux côtés adjacents, qui sont les rayons de deux des cercles donnés.

Les rectangles $ZQP'Z'$, $Z'Q'P''Z''$, $Z''Q''PZ$, dans chacun desquels un des côtés est donné (savoir le rayon de l'un des cercles donnés), croissent comme les côtés ZZ', $Z'Z''$, $Z''Z$ du triangle $ZZ'Z''$; et, en particulier, le triangle $XX'X''$ est le plus grand, lorsque le triangle $ZZ'Z''$ est le plus grand. Partant, on détermine comme il suit le plus grand triangle $XX'X''$.

Construction. Au triangle $CC'C''$ soit circonscrit (*Lemme*) le plus grand triangle $ZZ'Z''$ ayant ses angles égaux aux angles donnés du triangle $XX'X''$. Soient menées aux cercles donnés des tangentes respectivement parallèles aux côtés du triangle $ZZ'Z''$. Ces tangentes formeront, par leurs rencontres, le triangle demandé $XX'X''$.

PROBLÈME II. A un triangle donné, inscrire trois cercles dont les rayons soient entre eux dans des rapports donnés, de manière que chacun de ces cercles touche un des côtés du triangle donné, que chacun d'eux touche aussi les deux autres cercles (extérieurement), et que le système de ces cercles soit le plus petit possible.

Solution. La solution de ce second problème est ramenée à celle du premier, par la méthode ordinaire de fausse position.

Remarque I. Le cas particulier de l'égalité des rayons des cercles donnés rend équilatéral le triangle $CC'C''$.

Remarque II. Au lieu de s'occuper de la limite en grandeur du triangle donné d'espèce, circonscrit au système des cercles donnés, on peut demander que ce triangle soit donné de grandeur. Et réciproque-

ment, au triangle donné, on peut inscrire un système de cercles donné de grandeur. Ces problèmes sont élémentaires, et on peut tirer de leur construction la limite pour l'un et l'autre cas.

Remarque III. Tout ce qui a été dit sur le cas du contact des trois cercles s'applique à un système de trois cercles dont les rayons ont des rapports donnés, soit entre eux soit aux droites qui joignent leurs centres.

Envisagé sous ce point de vue général, le problème proposé donne lieu à huit cas, suivant que les contacts des cercles et des côtés du triangle, relativement à ce triangle, sont tous les trois intérieurs, deux intérieurs et un extérieur, un intérieur et deux extérieurs, ou enfin tous les trois extérieurs.

Troisième solution;

Par M. Rochat, professeur de navigation à St-Brieux.

M. Rochat, en traitant les deux problèmes d'une manière purement analitique, est parvenu à des formules assez simples, mais dont il n'a pas indiqué la construction.

QUESTION PROPOSÉE.

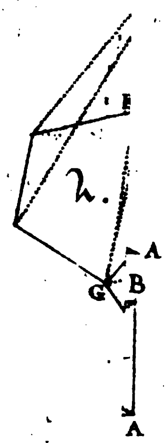
Théorème à démontrer.

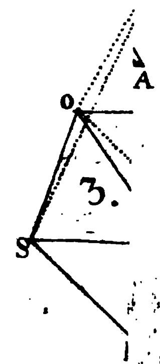
Si à une ellipse on circonscrit un quadrilatère quelconque, le point d'intersection des deux droites qui joindront les points de contact de l'ellipse avec les côtés opposés de ce quadrilatère, coïncidera avec le point d'intersection de ses deux diagonales.

Fin du Tome second.

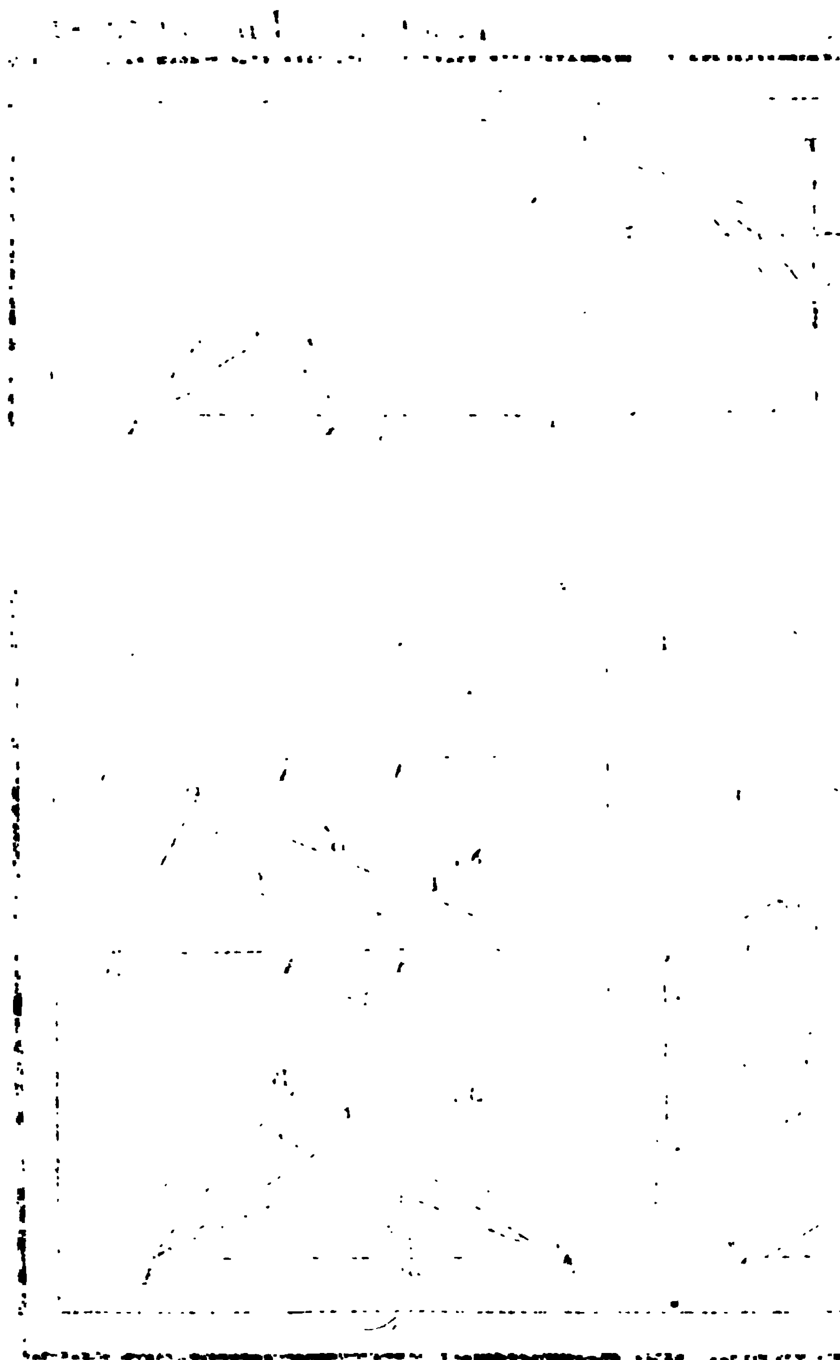
7-385.

p. 357-360.





J. G. fecit.



TABLE

Des matières contenues dans le II.me volume des Annales.

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

ANALISE.

ANALISE INDÉTERMINÉE.

ANALISE TRANSCENDANTE.

ANNONCE.

ASTRONOMIE.

GÉOMÉTRIE.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

HYDRODYNAMIQUE.

PROBABILITÉ.

STATIQUE.

TRIGONOMETRIE.

CORRESPONDANCE

Entre les questions proposées *et leurs* solutions.

ERRATA

Pour le tome second des Annales.

Pour les Planches.

Planche II, fig. 7. — Il faut un a au troisième sommet du triangle circonscrit à def.

Planche V, fig. 5. — Il faut une M à l'intersection de Cg et Nm.

Pour le Texte.

Page 32, dans l'énoncé du *problème de géométrie*, *supprimez* ces mots : équivalent à une surface donnée, et

Page 60, ligne 3, en remontant. — le nombre, *lisez* : le grand nombre.

Page 70, ligne 8 ; pour la formule lx= etc., *consultez* la page 178.

Page 88, ligne 9. — cadran, *lisez* : quadrans.

Page 93, lignes 2 et 5. — *Rochat : lisez : Pilatte.*

Page 96, ligne 8 et 9, en remontant. — Les signes des termes du second membre de l'équation doivent être alternatifs.

Page 153, équation (B). — Au second terme du coefficient de y^2, il faut p, au lieu de $2p$; et au second terme du coefficient de y, il faut $1pt$, au lieu de $2pt^2$. Cette erreur qui s'est reproduite dans les équations (C), (D), (E), n'appartient point à l'auteur du mémoire.

Page 237, aux dernières lignes du mémoire, *substituez* ce qui suit :

$$x_1 = +16.11 + 39e = 176 + 39e\,,$$
$$x = +23.11 + 56e = 253 + 56e\,;$$

faisant donc $\quad e = -4\,,\ -3\,,\ -2\,,\ -1\,,\ \mp 0\,,\ +1\,, \ldots\ldots$

on trouvera $\begin{cases} x_1 = 20\,,\ 59\,,\ 98\,,\ 137\,,\ 176\,,\ 215\,, \ldots\ldots \\ x\ = 29\,,\ 85\,,\ 141\,,\ 197\,,\ 253\,,\ 309\,, \ldots\ldots \end{cases}$

Cette erreur n'appartient pas à l'auteur du mémoire.

Page 285, troisième ligne de la note. — alors, *lisez* ensuite.

Page 305, à la note. — *Supprimez* ces premiers mots : » Cherchez une moyenne » proportionnelle entre CA et CB', et une autre entre CB et CA' » ; et *substituez-leur* les suivans :

« Construisez un demi-cercle dont le diamètre soit plus grand que la plus » grande des quatre lignes données CA, CB, CA′, CB′, et portez-y ces quatre » lignes comme cordes, à partir de l'une des extrémités de son diamètre. Cherchez » une moyenne proportionnelle entre les projections de CA et CB′ sur le diamè- » tre, et une autre entre les projections de CA′ et CB sur ce même diamètre. »

Page 338, ligne 9. — *Ajoutez* : et leurs extrémités.

Page 342, ligne 3. — 12.$\frac{3}{4}$, *lisez* 12.$\frac{1}{2}$.

Page 347, ligne 4, en remontant : $\frac{n}{m+n}$, *lisez* $-\frac{n}{m-n}$.

